PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10. 15. Mai 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 12 am 5. Juni 1920.

INHALT:

Originalmitteilungen:

J. E. Lilienfeld u. F. Rother, Untersuchungen über die sichtbare, blaugraue Brennfleckstrahlung an der Lilienfeldröhre. S. 249.

R. v. Mises, Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik. II. S. 256.

G. Jaeckel, Die physiologische Erklärung des „Tellermondes". S. 262.

W. Hahnemann u. H. Hecht, Schallgeber und Schallempfänger. III. S. 264.

H. Greinacher, Zur Messung der Radiumemanation in Quellwässern. S. 270.

F. Rother, Ein Versuch zur Demonstration des Rayleighschen Gesetzes. S. 272.

E. Budde, Bemerkung zu einer Abhandlung des Herrn Waetzmann S. 274.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

C. A. Crommelin, Der „supraleitende Zustand" von Metallen. S. 274.

Berichtigung. S. 280.

Personalien. S. 280.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Untersuchungen über die sichtbare blaugraue Brennfleckstrahlung an der Lilienfeldröhre.

Von J. E. Lilienfeld und Franz Rother.

Mit Tafel I.

I. Einleitung.

§ 1. Der eine von uns hat noch nicht ganz vor Jahresfrist das vom Brennfleck ausgestrahlte sichtbare, graublaue Licht spektral untersucht [„Bericht"[1], § 27]. Es ergab sich dabei ein kontinuierliches Spektrum, welches große Ähnlichkeit mit demjenigen eines Temperaturstrahlers hatte. Die verhältnismäßig große Intensität der kurzwelligen Bestandteile des Spektrums wies auf das Bestehen einer außerordentlich hohen Temperatur hin. Im Anschluß an diese Feststellung wurde die Ansicht ausgesprochen, daß die sichtbare Brennfleckstrahlung von der über der Metallfläche gelegenen Elektronenwolke herrührt, welche als von den eigentlichen Kathodenstrahlen in lebhafte Temperaturbewegung versetzt zu denken ist. Das Bild wurde noch dahin näher ausgebaut, daß die der Temperaturbewegung unterworfenen Elektronen der im Brennflecke bestehenden Doppelschicht angehören. So wurde der Gedanke nahegelegt, daß unter dem Einflusse der in der Doppelschicht bestehenden mächtigen Felder die Strahlung in einen Polarisationszustand („Bericht", § 28) versetzt werden müsse.

Dies war für uns der Anlaß, die sichtbare Brennfleckstrahlung auf ihren Polarisationszustand hin zu untersuchen. Das im folgenden mitzuteilende, die Polarisationserscheinung betreffende Material dürfte genügen, um ein weitgehend abgeschlossenes Urteil über diese Erscheinung zu begründen.

Hand in Hand mit der Untersuchung des Polarisationszustands war auch das Spektrum der Strahlung Gegenstand eines fortgesetzten Studiums. Es bestand ursprünglich die Absicht, die Lage des Intensitätsmaximums im Spektrum aufzusuchen, Vergleiche der Intensitätsverteilung anzustellen und so die Höhe der mutmaßlichen Temperatur abzuschätzen. In dieser Richtung kann die Untersuchung noch keinesfalls als abgeschlossen betrachtet werden. Nichtsdestoweniger werden im folgenden einige Spektrogramme mitgeteilt, hauptsächlich deshalb, weil das von dem einen von uns ursprünglich veröffentlichte Spektrogramm („Bericht", Tafel I) auf einer gewöhnlichen blauempfindlichen Platte aufgenommen war, so daß die für das Auge sichtbare rote Strahlung auf dem Bilde nicht mit zum Vorschein kam. Auch sonst ist gegenwärtig mit einer sorgfältiger durchgebildeten photographischen Technik gearbeitet worden, so daß es von allgemeinem Interesse sein dürfte, hier die im wesentlichen das ursprüngliche Ergebnis bestätigenden Aufnahmen wiedergegeben zu sehen. Die Spektraluntersuchung des blaugrauen Lichtes wird von dem einen von uns in der Richtung fortgesetzt, eine Abschätzung der mutmaßlichen Temperatur sowie die Ausdehnung des Spektrums zu ermitteln.

II. Röhre und Apparatur.

§ 2. Die Untersuchungen wurden an einer besonders für diesen Zweck gebauten Lilienfeld-Röhre („Bericht", Kapitel I, II und III) ausgeführt, deren Brennfleck wesentlich breiter und verwaschener war als derjenige einer normalen Röhre. Diese Wahl des Brennflecks

1) Im folgenden werden die Lilienfeldschen, in verschiedenen Zeitschriften verteilten und zum Teil schwer zugänglichen Arbeiten nicht als solche zitiert, sondern es wird auf den zusammenfassenden, im „Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik" 16. Bd., Heft 2 erschienenen Bericht „Die Hochvakuum-Röntgenröhren" zurückgegriffen. Man wird die Originalarbeiten in diesem Berichte genannt finden.

wurde getroffen, weil bei den gewöhnlichen, scharf ringförmigen Brennflecken es nicht gut möglich war, ein in einer erheblichen Breite gleichmäßig geschwärztes Spektrum zu erhalten, vielmehr die eigenartigen, aus zwei parallel verlaufenden schmalen Streifen bestehenden Spektren resultierten, wie dies die erste von dem einen von uns veröffentlichte Aufnahme zeigt. Gleichzeitig kann diese erste Aufnahme als Beweis dafür angesehen werden, daß am Aussehen des Spektrums durch die abgeänderte Form des Brennflecks nichts Merkliches verändert wurde. Das Gleiche gilt für die Polarisationserscheinung, die von uns an zahlreichen normalen Röhren untersucht wurde, bevor wir die endgültigen Aufnahmen an der gleichen, besonderen Röhre herstellten, und zwar war der Grund dafür, daß für beide Zwecke die nämliche Röhre beibehalten wurde, hauptsächlich der, daß bei normalen Röhren das Licht von der Glühlampe nicht in dem gleichen Maße von der Antikathode weggeblendet ist, wie das bei dieser besonderen Röhre mit voller Absicht geschah, indem zwischen Glühlampe und Lochkathode ein breiter an dem Halter des Glühlampendrahtes befestigter Metallschirm angeordnet war.

§ 3. Zum Betrieb der Röhre wurde pulsierende Gleichspannung verwendet, welche mit Hilfe eines mechanischen rotierenden Gleichrichters aus gewöhnlicher technischer Wechselspannung von 50 Perioden in der Sekunde erzeugt wurde. Die Röhrenschaltung war die bekannte Zweigwiderstandsschaltung („Bericht", S. 122, Fig. 4). Es wurde absichtlich nicht mit sehr hohen Spannungen gearbeitet; die Parallelschlagweite zwischen Spitzen betrug in keinem Falle mehr als 90 mm. Das geschah im Hinblick darauf, daß die Aufgabe vorlag, die sichtbare Strahlung von der Röntgenstrahlung zu trennen. Diese Aufgabe ist um so leichter zu lösen, je weniger durchdringungsfähig die Röntgenstrahlung ist. Eine auffallende Änderung des Effekts mit zunehmender Spannung wurde nicht beobachtet. Die Milliampèrebelastung der Röhre betrug zwischen 4 und 20 Milliampère und wird im folgenden von Fall zu Fall genannt werden.

§ 4. Bei einem derartig weichen Röhrenbetrieb war es nicht nötig, die Aussiebung der sichtbaren Strahlung von der Röntgenstrahlung durch Spiegelung der ersteren an einem total reflektierenden Prisma, wie das von dem einen von uns ursprünglich ausgeführt wurde, zu bewirken. Es konnte vielmehr in gerader Durchsicht gearbeitet werden unter Dazwischenschaltung eines in einer großen 2 mm dicken Bleiwand angeordneten Bleiglasfilters von 15 mm Dicke. Die optischen Apparate wurden, soweit es sich nötig erwies — besonders die Holzteile und die Plattenkassetten — noch einmal besonders in 1 mm starkes Bleiblech eingewickelt. Die auf diese Art erreichte Abschirmung der Röntgenstrahlung war so vollkommen, daß selbst bei der höchsten vorkommenden Expositionszeit von drei Stunden eine merkliche Plattenschwärzung nicht entstand, wenn das sichtbare Licht mit Hilfe einer dünnen Pappscheibe weggeschattet war.

III. Die Untersuchung des Polarisationszustands.

a) Die optische Anordnung.

§ 5. Die subjektive Betrachtung des Brennflecks durch einen Nicol ist naturgemäß der einfachste Weg, um den Polarisationszustand zu untersuchen. Eine solche Betrachtung bildete in der Tat den Anfang unserer Untersuchungen und ergab — wie der eine von uns bereits mitgeteilt hat („Bericht", § 28) — das Vorhandensein eines dadurch definierten Polarisationszustands, daß der elektrische Vektor parallel zur Brennfleckfläche schwingt, wobei ein sehr ausgeprägtes Energiemaximum der Schwingung im Schnitt der Symmetrieebene mit dem Antikathodenspiegel liegt — vorausgesetzt, daß in der Röhre, wie üblich, der Antikathodenspiegel ungefähr unter 45° gegen den Kathodenstrahlengang geneigt ist. Das Licht wird in der geeigneten Stellung vom Nicol derartig weitgehend weggelöscht, daß die übrigbleibende Helligkeit an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegt, so daß in erster Annäherung vom Vorhandensein einer beinahe vollkommenen Polarisation gesprochen werden konnte.

§ 6. Die im folgenden zu beschreibende Anordnung verfolgt nun den Zweck, den so subjektiv festgestellten Effekt objektiv auf photographischem Wege festzuhalten. Ferner die Frage zu klären, ob das erwähnte, in der Symmetrieebene der Röhre liegende Maximum der Schwingungsenergie so ausgeprägt ist, daß das Vorhandensein einer linearen Polarisation behauptet werden darf — oder ob elliptisch polarisiertes Licht vorliegt. Schließlich, ob der erwähnte, an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegende Anteil des vom Nicol nicht ausgelöschten Lichtes von einer Zerstreuung im Nicol herrührt — oder ob er natürliches bzw. anders polarisiertes Licht darstellt.

Dementsprechend erhielt die optische Anordnung die folgende, aus Fig. 1 zu entnehmende Gestalt. Benutzt wurde ein Voigtsches Polarisationsspektrometer, von dessen Kollimator *Co* der Nicol entfernt war. Auf die im Brennpunkte des Kollimatorobjektivs

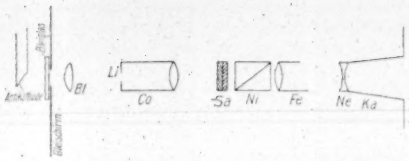


Fig. 1.

befindliche Lochblende *Bl* wurde mittels einer Linse *Li* ein Bild des sichtbaren Brennflecks entworfen. Vor das Beobachtungsfernrohr *Fe* war ein Nicol *Ni*, und vor diesen eine Savartsche Platte *Sa* geschaltet, welche für sich allein und auch mit dem Nicol zusammen gedreht werden konnte, so daß eine Einstellung gegen den Hauptschnitt des Nicols möglich war. Trifft nun polarisiertes Licht auf diese Anordnung, so müssen bei einer Drehung die dabei im Gesichtsfeld auftretenden isochromatischen Streifen vollkommen verschwinden, wenn das auftreffende Licht rein linear polarisiert ist. Bei dem geringsten Anteil von elliptisch polarisiertem Licht bleiben jedoch die Streifen bestehen. Um die Erscheinungen photographisch festhalten zu können, wurde das Okular des mit dem Analysator verbundenen Beobachtungsfernrohrs entfernt und an seine Stelle eine kleine photographische Kamera *Ka* gebracht. Zwecks Erzielung von Aufnahmen in geeigneter Größe wurde zwischen Fernrohrobjektiv und Aufnahmekamera ein optisches Negativsystem *Ne* eingeschaltet; es erwies sich als ausreichend, dazu eine einfache Bikonkavlinse aus dem Okular eines Galileifernrohrs zu benutzen. Die zu photographierende Erscheinung war in jedem Falle lichtstark genug, um mit einer Lupe scharf in die Plattenebene eingestellt werden zu können.

b) Die Versuchsergebnisse.

Mit der beschriebenen Anordnung wurden zwei Aufgaben gelöst.

§ 7. Es wurde erstens die Savartsche Platte entfernt und bei auf Helligkeitsmaximum eingestelltem Nicol je eine Aufnahme mit 9 Minuten Expositionszeit gemacht, die eine unter einem Blickwinkel von etwa 45° auf die Antikathodenplatte, die andere bei annähernd streifender Inzidenz in der Profilstellung der Röhre unter einem Blickwinkel von etwa 15°. Die Aufnahmen sind in der Tafel mit den Nummern I und II wiedergegeben. Hierauf wurde in beiden Fällen der Nicol auf Helligkeitsminimum eingestellt. So wurden bei der gleichen Expositionszeit von 9 Minuten die Bilder III und IV erhalten. In Übereinstimmung mit der am Anfang dieses Abschnitts beschriebenen subjektiven Betrachtung des Brennflecks erkennt man, daß im Auslöschungsfalle die übrig bleibende Helligkeit außerordentlich gering ist und innerhalb der Expositionszeiten auch für die Platte an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegt.

Wir möchten es nicht unterlassen, dabei auf Folgendes aufmerksam zu machen. Es gelingt nur in ganz seltenen Fällen, den Antikathodenspiegel vollständig sauber zu erhalten. Meistens befinden sich auf ihm einige winzig kleine Staubpartikel, welche in den Gang der Kathodenstrahlen gebracht, hell weiß aufleuchten. Solche Partikel waren — wenn auch in geringer Anzahl — bei den bereits beschriebenen, aber auch bei den weiter unten zu beschreibenden Aufnahmen vorhanden. Selbstverständlich ist das von den auf Weißglut erhitzten Staubteilchen ausgesandte Licht natürliches, unpolarisiertes, und wird in keiner Stellung des Nicols weggelöscht. Die Punkte treten also infolge Kontrastwirkung in dem Falle, in welchem alles übrige Licht von den Nicols ausgelöscht wurde (Fig. 4), bedeutend deutlicher auf den Bildern hervor als in dem Falle, in welchem die durch die graublaue Strahlung verursachte Schwärzung darüber gelagert ist (Fig. 2).

§ 8. Die besprochenen vier Bilder beweisen, daß das untersuchte Licht so gut wie restlos polarisiert ist. Daraus, daß die Auslöschung eintritt, wenn die Polarisationsebene des Nicols parallel zur Röhrenachse steht, folgt, daß der elektrische Vektor parallel zur Brennfleckebene schwingt, und zwar unabhängig davon, welchen Winkel die Brennfleckebene mit dem Kathodenstrahlenbündel einschließt, denn dieser ist durch die willkürliche Abschrägung des Antikathodenkopfes gegeben. Es darf nicht außer acht gelassen werden, daß dieser Winkel nur dann, mathematisch gesprochen, streng definiert wäre, wenn das Kathodenstrahlenbündel ein mathematisch streng paralleles und die Brennspiegelfläche mathematisch streng eine Ebene wäre. Beides ist nun sicher nicht der Fall. Insofern kann die geringe, in der Auslöschstellung übrig bleibende Helligkeit mindestens zum Teil auf die Unebenheit der zwar glänzenden, aber nicht auf Hochspiegelglanz polierten Antikathodenplatte zurückgeführt werden. In der Tat hatten wir beim Vergleiche verschieden gut polierter Antikathodenplatten sehr den Eindruck, als ob der sich nicht auslöschenlassende Teil des Lichtes um so geringer würde, auf je höheren Spiegelglanz die Platte poliert ist. Es ist aber sehr schwer, hierüber eine abschließende Beobachtung zu machen, weil die Hochglanzpoli-

tur der Platte schon im Pumpprozeß etwas leidet. Es sei denn, daß man bei der Beobachtung des Lichtes andere Stellen der Antikathodenplatte benutzt, als die ursprünglich beim Pumpen von den Kathodenstrahlen getroffenen.

Aus der außerordentlich geringen, sich nicht auslöschenlassenden restlichen Helligkeit läßt sich eine Schätzung der unteren Grenze für die Dicke der leuchtenden Schicht ableiten. Nimmt man an, daß die Rauheit des Spiegels durch Unebenheiten von der Größenordnung von 500 $\mu\mu$ bedingt ist, so folgt, daß die leuchtende Schicht mindestens von der nächsten Größenordnung sein muß, also zum mindesten nach tausendstel Millimetern Dicke zu schätzen ist. Das sei aber hier ausdrücklich nur mit Vorbehalt als eine Schätzungs*möglichkeit* erwähnt.

§ 9. Die besprochenen Aufnahmen sagen noch nichts darüber aus, ob das Licht elliptisch oder linear polarisiert ist. Es war nun die *zweite*, mit dem beschriebenen Apparat zu lösende Aufgabe, darüber eine Entscheidung zu fällen. Zu diesem Zwecke wurde vor den Nicol, wie beschrieben, eine *Savart*sche Platte geschaltet. Es wurden wieder Aufnahmen unter einem Blickwinkel von etwa 45°, sowie Aufnahmen unter streifender Inzidenz hergestellt. Die Bilder sind unter V bis X auf Tafel I wiedergegeben, und zwar zeigt Bild V den Brennfleck im Streifenoptimum, Bild VI dieselbe Aufnahme, jedoch im Streifenminimum. Man erkennt, daß die Streifen restlos verschwunden sind. Analog sind die Bilder VII bis X in Profilstellung der Röhre, jedoch unter verschieden streifender Inzidenz aufgenommen. Es war dabei der Blickwinkel von Bild VII und VIII etwa 20°, der von Bild IX und X etwa 10°. Auch hier verschwinden im Streifenminimum die Streifen restlos. Die Expositionszeiten waren in allen Fällen gleich — 9 Minuten.

Man wolle beachten, daß sämtliche Aufnahmen an wie üblich unter 45° abgeschrägten Antikathoden angestellt wurden. Um die Untersuchung endgültig abzuschließen, hätte noch eine Aufnahme an einem Rohre gemacht werden müssen, bei welchem die Antikathode so nahe, wie das sich praktisch verwirklichen läßt, senkrecht zum Kathodenstrahlengange steht, da sich für diesen Fall die Art der Polarisation nicht mit Sicherheit aus dem bisherigen Versuchsmaterial ableiten läßt. Eine dafür geeignete Röhre soll demnächst hergestellt werden, wonach die Versuche nachgetragen werden sollen.

§ 10. Ergibt sich nun aus den ersten vier Aufnahmen I bis IV überhaupt eine Polarisation des sichtbaren Brennflecklichtes parallel zur Brennfleckebene, so folgt aus den Aufnahmen V bis X, daß die Schwingung des elektrischen Vektors noch in einem höheren Sinne geordnet ist, und zwar so, daß keine andere Schwingungsrichtung vorliegt, als einzig und allein die zur Schnittlinie der Symmetrieebene der Röhre mit der Antikathodenplatte parallele, — *also eine völlig lineare Polarisation*.

§ 11. Hinsichtlich der photographischen Technik sei darauf hingewiesen, daß aufs sorgfältigste auf das Einhalten genau gleicher Bedingungen geachtet wurde. Um ferner zu zeigen, daß das sonstige, etwa von der Glühlampe der Lilienfeldröhre herrührende Licht nicht in einem merklichen Maße auf die Platten eingewirkt hatte, wurde noch Aufnahme XI und XII hergestellt bei vollbeheizter Glühlampe, aber ohne daß die Entladung durch die Röhre eingeleitet worden wäre, und zwar befand sich bei Aufnahme XI die Optik in der Stellung des Streifenminimums, bei Aufnahme XII in der Stellung des Streifenoptimums. Die Belichtungszeit für diese beiden Aufnahmen betrug unter sonst völlig gleichen Umständen je 30 Minuten. — Für alle bisher beschriebenen Aufnahmen wurden *Hauff-Ultra-Rapid*-Platten benutzt; die Entwicklungszeit betrug 6½ Minuten in Methol-Hydrochinon-Entwickler.

IV. Die spektrale Untersuchung.

§ 12. Die spektrale Untersuchung wurde so ausgeführt, daß an Stelle des in Fig. 1 schematisch angegebenen *Voigt*schen Polarisationsphotometers ein lichtstarker *Steinheil*scher Spektrograph mit *Rutherford*-Prisma so gesetzt wurde, daß der Brennfleck sich auf dem Spalte abbildete.

Es war wegen der eigenartigen Gestalt des Brennfleckes am vorteilhaftesten, die Röhre in Profil zu stellen und die Antikathode bei streifender Inzidenz anzuvisieren. So sind bei weitem die meisten Aufnahmen gemacht worden, von denen drei in den Figuren XIII, XIV, XVI wiedergegeben sind. Die Aufnahme XIII enthält das Spektrum eines — wie in der Einleitung erwähnt — besonders für Spektraluntersuchung hergestellten Rohres mit verbreitertem Brennfleck, welches durch günstigen Zufall so sauber ausgefallen war, daß auf der Antikathodenplatte leuchtende Pünktchen nicht vorhanden waren. Als orientierendes Vergleichsspektrum ist darüber dasjenige eines Heliumrohres abgebildet, welches auf der gleichen Platte durch Verschieben der Kassette parallel

zur Spaltrichtung erhalten wurde. In der gleichen Weise wurde das Spektrum Fig. XIV, welches durch ein leuchtendes Pünktchen an der Antikathode etwas entstellt ist nebst einem orientierenden Heliumspektrum und zwei Vergleichsspektren erhalten, und zwar sind die Vergleichsspektren diejenigen des Metallfadens einer Glühlampe, dessen Temperatur 1950° (mit dem Wanner schen Pyrometer bestimmt) war. Das erste, weniger durchexponierte Vergleichsspektrum ist so hergestellt, daß die Schwärzung im Rot-Orange ungefähr denselben Betrag hat wie diejenige des gleichen Gebiets im Brennfleckspektrum. Das zweite Vergleichsspektrum ist $2\frac{1}{2}$ mal länger exponiert. Der Vergleich ergibt, daß bei gleichem Schwärzungsbetrage im Rot-Orange das Brennfleckspektrum mit ungefähr gleichbleibendem Schwärzungsbetrage bis an diejenige kurzwellige Grenze reicht, welche unter Anwendung der beschriebenen Hilfsmittel zugänglich war, hingegen das Spektrum des Metallfadens kurz jenseits der blaugrünen Empfindlichkeitslücke der Platte mit einer ganz geringen Helligkeit abbricht. Bei dem $2\frac{1}{2}$ mal länger exponierten Metallfadenspektrum ist vom kurzwelligen Teil mehr zu sehen, jedoch bei weitem nicht soviel wie an der Brennfleckaufnahme, obwohl bei der letzteren Metallfadenaufnahme das Rot-Orange bereits erheblich gedeckter erscheint als bei der Brennfleckaufnahme.

Auf der Aufnahme XIV sieht man einen schwachen Längsstreifen, welcher im Grünblauen anfangend ins Kurzwellige hineinläuft. Dieser dürfte von einem fluoreszierenden, auf der Antikathode befindlichen Stäubchen herrühren, wie sie während des Herstellungsverfahrens der Röhre vom Lötmittel oder anderen angewandten Chemikalien manchmal zurückgelassen zu werden pflegen. Der kräftigere Streifen, welcher durch das ganze Spektrum durchläuft, aber im Vergleiche zum eigentlichen Brennfleckspektrum nach dem kurzwelligen Ende außerordentlich viel stärker abklingt, rührt von einem im Brennfleck stark erhitzten und intensiv weiß strahlenden Staubteilchen her.

Außer den beschriebenen, bei streifender Inzidenz aufgenommenen Spektren sind noch welche unter einem Blickwinkel von 45° auf die Antikathode aufgenommen worden, man vergleiche Fig. 1. Ein derartiges Spektrum ist bereits von einem von uns früher („Bericht", Tafel I) veröffentlicht worden. Da aber die damaligen Aufnahmen in Ermangelung rotempfindlicher Platten auf blauempfindlichen hergestellt waren und demgemäß der langwellige Teil an ihnen nicht sichtbar war, mag hier die Aufnahme nachgetragen werden. Die Fig. XV zeigt außer einem orientierenden Heliumspektrum zwei Brennfleckaufnahmen, zwischen welche ein Metallfadenspektrum eingefügt ist, welches wieder im Rot-Orange sehr viel intensiver gedeckt ist und trotzdem nach dem kurzwelligen Ende zu bedeutend schneller abklingt als die Brennfleckspektren.

§ 13. Die bisher in diesem Paragraphen besprochenen Spektralaufnahmen sind auf in der Emulsion mit Pinacyanol sensibilisierten Platten der Firma Perutz in München hergestellt. Die Aufnahmen zeigen das diesem Sensibilisator charakteristische Sensibilisierungsmaximum im Rot. Man erkennt, daß nach den langen Wellen zu das Spektrum der Brennfleckstrahlung jedenfalls nicht durch eine Eigenart des Spektrums, sondern durch die Abklingungsgrenze der Sensibilisierungsbande beschränkt erscheint.

Hinsichtlich der sowohl dem Brennfleck-licht als auch dem Metallfadenspektrum gemeinsamen Lücke im Blaugrünen ist zu erwähnen, daß sie mit der in diesem Gebiete vorhandenen Sensibilisierungslücke zusammenfällt. Zwecks Ausfüllung dieser Lücke wurden Versuche mit anders sensibilisierten, beispielsweise mit gelbgrünempfindlichen, sogenannten orthochromatischen Platten ausgeführt. Diese Versuchsaufnahmen ergaben aber keine wesentlich anderen Bilder — weil auch diese Platten eine ähnliche Lücke aufweisen, — so daß von einer Wiedergabe der Bilder hier abgesehen wurde.

Nicht unberücksichtigt bleiben darf die durch die dem Röntgenröhrenglas eigene, sich im Laufe des Betriebes einstellende blauviolette Färbung verursachte Filterwirkung. Da aber die diesbezügliche Absorptionsbande gerade in die Sensibilisierungslücke der rotempfindlichen Platte fällt, darf von der Erörterung dieser Fehlerquelle abgesehen werden, wie ein Vergleich zwischen den Aufnahmen XIII und XIV zeigt, von denen die erste an einer intensiv gefärbten, letztere an einer noch wenig gebrauchten, ungefärbten Röhre gemacht ist.

§ 14. Zusammenfassend kann über die Spektralaufnahmen gesagt werden, daß das Auffallendste an ihnen erstens das temperaturähnliche, kontinuierliche Aussehen des Spektrums, zweitens aber die bei den benutzten Hilfsmitteln nach dem kurzwelligen zu unbegrenzt erscheinende, auf eine außerordentlich hohe Temperatur hinweisende Schwärzungsintensität ist.

V. Brennfleckgestalt.

§ 15. Nicht unmittelbar zum Thema ge-

hörend, aber doch von Interesse ist es, die Brennfleckform mit Hilfe des sichtbaren Brennflecklichts aufzunehmen. Und zwar deshalb, weil gegenüber Lochkameraaufnahmen der Röntgenstrahlung eine aus naheliegenden Gründen korrektere Abbildung zu erwarten ist. Wir haben Aufnahmen unter ungefähr 45° Blickrichtung gemacht, die eine (leider infolge glühender Stäubchen unsauber geratene) — mit 28 mm Schlagweite (Fig. XVI) und 15 Milliamp., die andere mit 54 mm Schlagweite (Fig. XVII) und 12 Milliamp. Entsprechend den geringen Schlagweiten ist bei beiden Aufnahmen die Röhre als außerordentlich weich eingestellt zu bezeichnen. Es ist recht beachtenswert, daß der elliptisch abgebildete Brennfleck bei weicher Einstellung kleiner, bei harter größer ist, die Ellipsen aber einander ähnlich bleiben. Das entspricht dem Bilde, daß die in der konischen Bohrung der Kathode konvergent nach der Antikathode zu gerichteten Elektronen bei wachsendem elektrostatischen, von der Antikathode herrührenden Felde so beeinflußt werden, daß sie um so paralleler verlaufen, je höhere Spannung anliegt. Ferner ist gegenüber von anderer Seite aufgestellter Behauptung von Interesse darauf hinzuweisen, daß der Brennfleck durchaus symmetrisch auch bei den geringsten Spannungen ist, insbesondere, daß selbst dann der kleine zentrale Ring nicht weniger genau in der Mitte sitzt als bei höheren Spannungen.

VI. Eine Überlegung allgemeinerer Art.

§ 16. Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, ist von dem Einen von uns („Bericht", § 27) aus den spektralen Beobachtungen darauf geschlossen worden, daß das graublaue Brennflecklicht von einer Schwingung derjenigen Elektronen herrührt, welche in Form einer Wolke der Metallfläche des Antikathodenspiegels vorgelagert sind. Diese Elektronen werden durch den auftreffenden Kathodenstrahl in eine lebhafte Bewegung versetzt, bei welcher die Energie temperaturähnlich über die einzelnen Elektronen verteilt ist. Dementsprechend müssen in dem Elektronenschwarm sämtliche Geschwindigkeiten vertreten sein von ganz geringen anfangend bis zu denjenigen, welche der Geschwindigkeit der primären Kathodenstrahlen gleichkommt. Ein solcher Bewegungszustand bleibt naturgemäß nicht auf die dem Metall vorgelagerte Elektronenschicht beschränkt („Bericht", § 29), sondern er greift auch auf innerhalb des Metalls befindliche Elektronen über, und zwar um so tiefer, je größer die Geschwindigkeit der primären Kathodenstrahlen ist. Die sichtbare, blaugraue Brennfleckstrahlung rührt aber offenbar nur von demjenigen Teile der in Bewegung befindlichen Elektronen her, welche der Antikathode vorgelagert sind, da ja sichtbares Licht aus größeren Tiefen im Metall nicht hervordringt. Anders ist es mit der Röntgenstrahlung, welche auch aus tieferen Metallschichten zur Wahrnehmung gelangt.

In der Tat: wenn man sich der von dem Einen von uns vertretenen Auffassung („Bericht", § 29) anschließt, daß zum mindesten ein Teil des kontinuierlichen Röntgenspektrums die Fortsetzung des sichtbaren Spektrums darstellt und in gleicher Weise wie das blaugraue Brennflecklicht seitens der innerhalb der von den Kathodenstrahlen erregten Schicht schwingenden Elektronen ausgesandt wird, so darf nicht unbeachtet bleiben, daß für diese Betrachtung die Schicht in zwei Gebiete zu verteilen ist.

Erstens in dasjenige der dem Metall vorgelagerten Elektronen. In diesem Gebiete spielen sich die Bewegungen hauptsächlich unter dem Einfluß der dem Antikathodenspiegel im Raum vorgelagerten Kraftfelder ab, ohne daß eine erhebliche Störung infolge von Zusammenstößen mit Atomen der Antikathode in Frage käme. Dadurch wird es verständlich, daß ein in so hohem Grade geordneter Bewegungszustand hervorgebracht wird, wie er gedacht werden muß, damit linear polarisiertes Licht entstehe. In diesem Zusammenhange erscheint es nicht unwahrscheinlich, daß die im besprochenen Schichtgebiet erzeugte Röntgenstrahlung bei näherer Untersuchung sich mindestens als zu einem erheblichen Teil ähnlich polarisiert erweisen wird, wie das für das graublaue Licht angegeben wurde[1]).

Dem zweiten Gebiet der von den Kathodenstrahlen erregten Elektronenschicht aber, — welches tiefer im Metall sich befindet und von welchem aus demzufolge kein sichtbares Licht, sondern ausschließlich Röntgenstrahlung zur Wahrnehmung gelangen kann — dürfte ein in ähnlich hohem Grade geordneter Be-

1) In der bisherigen Literatur mitgeteilte Beobachtungen über den Polarisationszustand der Röntgenstrahlung widersprechen nicht der Annahme, daß ein Teil der Strahlung in der nämlichen Weise polarisiert ist, wie das für die blaugraue Brennfleckstrahlung gefunden wurde. Denn die durch die Schnittlinie der Symmetrieebene des Rohres mit dem Antikathodenspiegel gegebene Schwingungsrichtung weist eine erhebliche Komponente auch in derjenigen Richtung auf, in welcher das Vorhandensein einer Polarisation der Röntgenstrahlung seitens anderer Autoren behauptet wird, nämlich eine Komponente parallel zu dem primären Kathodenstrahlenbündel.

wegungszustand nicht mehr zukommen, weil hier der Raum von Metallatomen erfüllt ist. Es ist deshalb anzunehmen, daß die in diesem Gebiet ausgestrahlte Röntgenstrahlung sich als zu einem Teil oder gar nicht polarisiert erweisen wird.

§ 17. Die Tatsache selbst, daß die die graublaue Strahlung emittierende Schwingung parallel zur Brennfleckebene erfolgt, darf sehr wohl überraschend genannt werden. Sie ist von dem einen von uns im Zusammenhang mit verschiedenen anderen Erscheinungen, so auch mit den Fluoreszenzerscheinungen, dahin gedeutet worden, daß der Schwingungsvorgang innerhalb der als dem Brennfleck in kleinsten Dimensionen vorgelagert zu denkenden Doppelschicht sich abspielend aufzufassen ist. Die Elektronen bewegen sich gemäß dieser Vorstellung zwischen zwei positiven Schichtbelegen, von denen der eine längs der Oberfläche des Antikathodenmetalls, der andere auf einer dem Brennfleck vorgelagerten Fläche angeordnet ist (vgl. „Bericht", § 28, besonders Fig. 20).

Daß aber bei schräg zum Kathodenstrahl geneigter Antikathode nicht beliebige, zur Brennfleckebene parallele Schwingungsrichtungen vorkommen, vielmehr die Schwingung so gut wie ausschließlich in der Symmetrieebene der Röhre stattfindet, macht noch eine besondere Annahme erforderlich, dergestalt, daß die Resultate der auf die Elektronen ausgeübten Kräfte in die beobachtete Schwingungsrichtung fällt. Eine mögliche Vorstellung ist die, daß das allgemeine, in der Röhre bestehende Feld die Struktur der Doppelschicht in entsprechender Weise beeinflußt. Das Bestehen linearer Polarisation kann aber andererseits — unter Umständen auch ohne auf die Doppelschicht einzugehen — in Zusammenhang damit gebracht werden, daß eine erhebliche Geschwindigkeitskomponente der im Brennfleck aufprallenden Elektronen in die tatsächliche Schwingungsrichtung des lichtemittierenden Vorgangs fällt, während senkrecht dazu eine zur Brennfleckebene parallele Komponente nicht vorhanden ist. Wir möchten es vor der Hand dem Ergebnis fernerer Studien vorbehalten, welche der zwei Vorstellungen dem tatsächlichen Sachverhalt besser entspricht oder ob sie beide sich zu einem einheitlichen Bilde vereinigen lassen werden.

§ 18. Zum Schluß seien noch einige Worte über denjenigen Anteil der Strahlung gesagt, welcher unpolarisiert erscheint, seiner Intensität nach aber freilich an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegt. Das Vorhandensein eines solchen Anteils ist zweier verschiedener Deutungen fähig. Die eine mögliche Annahme ist die, daß selbst in dem idealen Falle, in welchem der Antikathodenspiegel eine mathematische Ebene wäre und die Kathodenstrahlen streng parallel zur Symmetrieebene der Röhre verliefen, ein ganz geringer Anteil des ausgestrahlten Lichtes unpolarisiert wäre. Diese Annahme würde in dem gegebenen Bilde dahin zu deuten sein, daß ein geringer Teil der Energie der linear geordneten Schwingungsbewegung des gedachten Elektronenschwarms sich einer ungeordneten Bewegung mitteilt. Die andere mögliche Annahme ist aber die, daß in dem oben gekennzeichneten Idealfalle der mathematisch genau ebenen Brennfleckfläche und der parallelen Kathodenstrahlführung das Licht restlos polarisiert erscheinen würde, daß also das Experiment einen geringen Rest unpolarisierten Lichtes deshalb zeigt, weil — wie §§ 7 und 8 des näheren ausgeführt wurde — der Antikathodenspiegel gewisse Rauhigkeiten besitzt und weil die Kathodenstrahlelektronen immerhin nicht streng parallele Bahnen beschreiben. Auch hier beabsichtigen wir nicht, eine Entscheidung zwischen den beiden Annahmen zu treffen, besonders weil selbst im Falle des Zurechtbestehens der ersten Annahme ein Anteil der unpolarisierten Strahlung ursächlich mit den zur zweiten Annahme angeführten Gründen zusammenhängen kann.

VIII. Zusammenfassung.

Es wurden an der blaugrauen Brennfleckstrahlung Untersuchungen ausgeführt, zum Zweck der Feststellung ihrer Polarisation und ihres Spektrums. Benutzt wurden Lilienfeldröhren mit besonders breitem Brennfleck und annähernd unter 45° zur Kathodenstrahlenrichtung geneigten Antikathode bei weicher Schaltung (bis zu 90 mm Äquivalentschlagweite).

Die Polarisationsuntersuchung ergab, daß die Strahlung bis auf einen geringen, an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegenden Rest derartig linear polarisiert ist, daß der elektrische Vektor parallel zur Brennfleckebene in der Schnittlinie dieser Ebene mit der Symmetrieebene der Röhre liegt.

Die spektrale Untersuchung ergab ein kontinuierliches, temperaturähnliches Spektrum, dessen Grenzen nach beiden Seiten durch nichts anderes als durch die zur Beobachtung angewandten Hilfsmittel und Methoden bedingt sind. Besonders auffallend ist, daß die Intensität des kurzwelligen Spektrumteils im Verhältnis zu dem langwelligen Teil ganz außerordentlich viel größer ist als bei andern be-

kannten Lichtquellen, so daß der mutmaßlichen Temperatur eine außerordentliche Höhe beigelegt werden muß, zu deren Bestimmung die Untersuchung von dem einen von uns fortgesetzt wird.

Das graublaue Brennflecklicht wird ursächlich auf die Schwingung der dem Metall vorgelagerten, durch die Kathodenstrahlen erregten Elektronenschicht zurückgeführt und der Zusammenhang des Vorgangs mit tiefer im Metall gelegenen Elektronen und auch mit der Röntgenstrahlung dahin gedeutet, daß mindestens ein Teil des kontinuierlichen Röntgenspektrums eine Fortsetzung des Spektrums der sichtbaren Strahlung darstellen dürfte. Auch einige andere Überlegungen allgemeiner Natur werden an diese Auffassung geknüpft. So der Zusammenhang der Polarisation mit der Doppelschicht im Brennfleck u. a. m.

Als nicht unmittelbar mit dem Gegenstand der Untersuchung zusammenhängendes, aber doch interessantes Ergebnis wird die Tatsache mitgeteilt, daß die Durchmesser der Brennfleckellipse der Lilienfeldröhre mit steigender Spannung wachsen, die Ellipse sich aber ähnlich bleibt.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, 26. Januar 1920.

(Eingegangen 29. Januar 1920.)

Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik II.

Brownsche Bewegung als Beispiel.

Von R. v. Mises.

Zu den im ersten Teil dieser Note (diese Zeitschr. 21, 225, 1920) gegebenen „Allgemeinen Betrachtungen" wird im folgenden als Beispiel die Theorie der Brownschen Bewegung kurz dargestellt. Dabei handelt es sich nur darum, die Übergänge, die sonst durch stillschweigende Einführung einer Ergodenhypothese gewonnen werden, durch logisch einwandfreie Überlegungen zu ersetzen.

1. Das erste Ausgangs-Kollektiv und seine Ableitungen. (Virtuelle und Raumgesamtheit.) Wir gehen von folgendem einfachen Modell der Brownschen Bewegung aus. In einem parallelepipedisch abgegrenzten Teil des dreidimensionalen Raumes seien die Punkte, deren Koordinaten ganze Vielfache einer Einheit α sind, als „Standorte" der einzelnen Partikelchen ausgezeichnet. Zu Zeiten, die ganze Vielfache einer Zeiteinheit τ sind, sollen die Teilchen, deren Gesamtzahl n ist und die als untereinander völlig gleich angesehen werden, sich ausschließlich in den N Punkten jenes Punktgitters befinden. Sowohl α als τ stellen wir uns außerordentlich klein vor gegenüber den Längen und Zeiten, die den kleinsten, bisher beobachteten entsprechen.

Das erste Ausgangs-Kollektiv, das wir ins Auge fassen, habe zum Element ein einzelnes Teilchen, oder genauer die Beobachtung der Lage eines Teilchens zu einem bestimmten ausgezeichneten Zeitpunkt. Merkmal des Elements sei die zwischen 1 und N gelegene Zahl, die den Standort des Teilchens angibt. Die Verteilung innerhalb dieses Kollektivs nehmen wir als gleichförmig an, d. h. wir erklären: 1. Die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Teilchen, sich zu einer feststehenden Zeit in einem beliebigen der N Gitterpunkte aufzuhalten, ist — laut Annahme — gleich $1:N$. Einer Erklärung bedarf hier der Begriff der „feststehenden Zeit", der von der Art der Beobachtung abhängt. Gemeint kann natürlich nur sein, daß innerhalb jeder Einzelbeobachtung der Zeitpunkt feststeht, also z. B. man denkt sich alle Teilchen in irgendeiner mechanischen Weise durcheinander gemengt und unmittelbar darauf ($t = 0$) die Lage des betreffenden Teilchens beobachtet, dann in gleicher Weise gemengt und wieder beobachtet usf.; wenn dieses Verfahren unbeschränkt oft wiederholt wird, soll die relative Häufigkeit jedes einzelnen Standortes sich für ein bestimmtes Teilchen dem Wert $1:N$ nähern.

Aus diesem Ausgangs-Kollektiv, oder eigentlich aus n derartigen, völlig gleichen, Kollektivs leiten wir ein neues wie folgt ab. Element sei jetzt die (der eben beschriebenen analoge) Beobachtung einer Gruppe von n Partikelchen hinsichtlich ihrer Standorte zur festgesetzten Zeit $t = 0$, und Merkmal die Zahl x der Teilchen, die sich gerade in einem bestimmten der N Standorte, z. B. im Nullpunkt des Koordinatensystems, aufhalten. Man gelangt zu diesem Kollektiv durch die Operation der „n-fachen Verbindung", die als Element schon das von uns gewünschte, als Merkmal aber die Gesamtheit der n Lagenangaben aller Teilchen aufweist, und durch darauf folgende „Mischung", die alle jene Merkmale zusammenwirft, die gleiches x besitzen. Jeder der N^n Aufstellungsmöglichkeiten kommt innerhalb der „Verbindung" dieselbe Wahrscheinlichkeit N^{-n} zu, und um die Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$ für unser Kollektiv zu erhalten, müssen wir so viele N^{-n} zusammennehmen, als verschiedene Aufstellungen bei glei-

chem x vorhanden sind. So entsteht die bekannte (Bernoullische) Formel:

$$w_n(x) = \binom{n}{x}(N-1)^{n-x}N^{-n} = \\ = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{N}\right)^x\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-x}. \quad (1)$$

Wenn n und N große Zahlen werden, aber derart, daß $n:N = \nu$ und auch x endlich bleiben, so kann man (1) auch vereinfachen:

$$w_n(x) = \frac{1}{x!}\left(\frac{n}{N}\right)^x\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N\nu}\left[1\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{N}}\cdot\frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{N}}\cdot\ldots\cdot\frac{1-\frac{x-1}{n}}{1-\frac{1}{N}}\right] \sim \frac{\nu^x e^{-\nu}}{x!}, \quad (2)$$

da die x Brüche in der eckigen Klammer sich sehr wenig von der Einheit unterscheiden. Wir haben also für die Verteilung innerhalb des jetzt betrachteten Kollektivs den Satz: 2. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Teilchenzahl x in einem bestimmten Punkt des Gitters zu einer feststehenden Zeit ist $w_n(x)$ nach Gleichung (1), bzw. bei großem n und N, aber endlichem ν und x, nach Gleichung (2). Die Prüfung dieses Satzes im Gedankenexperiment hat wieder in der Weise zu erfolgen, daß vor jeder der unendlich vielen Beobachtungen die Teilchen irgendwie durcheinander gemengt werden. Das hier betrachtete Kollektiv entspricht ungefähr dem, was man bisher die „virtuelle Gesamtheit" der Teilchen zu nennen pflegte.

Wir betrachten nun ein drittes Kollektiv, das ebenso wie das zweite aus dem oben eingeführten Ausgangs-Kollektiv hervorgeht und das ungefähr der bisherigen „Raumgesamtheit" entspricht. Man gelangt hierzu, wenn man die bereits erwähnte „n-fache Verbindung" des Ausgangs-Kollektivs einer anderen „Mischung" unterwirft. Wir wollen jetzt alle jene Aufstellungen der n Teilchen zusammenwerfen, bei denen die feste Teilchenzahl x an genau $z = Ny$ Punkten auftritt. Gefragt ist also nach der von x abhängigen Wahrscheinlichkeit $f_n(y; x)$ dafür, daß innerhalb einer Aufstellung der n Teilchen genau x-fach besetzte Punkte gerade in der relativen Anzahl y vorhanden sind. Die vollständige Berechnung der Funktion f_n mit der unabhängig Veränderlichen y und dem Parameter x wäre zu langwierig und für unsere Zwecke ohne Interesse. Wir begnügen uns damit, den „Mittelwert" a und die „Streuung" s^2 der Verteilung f_n zu ermitteln, die durch die zweite und dritte der folgenden Gleichungen

$$\sum_y f_n(y; x) = 1, \qquad \sum_y y f_n(y; x) = a(x),$$
$$\sum_y (y-a)^2 f_n(y; x) = \sum_y y^2 f_n(y; x) - a^2 = s^2(x) \quad (3)$$

definiert werden, während die erste aus dem Begriff der Wahrscheinlichkeit folgt; die Summen sind über sämtliche mögliche Werte von y zu erstrecken. Aus der Kenntnis von a und s^2 werden wir alle für uns notwendigen Resultate gewinnen.

Um den Mittelwert a zu berechnen, denken wir uns zunächst x aus den n Teilchen herausgehoben, was auf $\binom{n}{x}$ verschiedene Arten möglich ist, dann für sie eine unter den N verfügbaren Stellen ausgewählt, was auf N Weisen geschehen kann, und schließlich die übrigen $n-x$ Teilchen auf die übrigen $N-1$-Plätze verteilt, wofür es $(N-1)^{n-x}$ Ausführungsarten gibt. In der Anzahl $\binom{n}{x}N(N-1)^{n-x}$ sind alle Aufstellungen mit wenigstens einer x-fach besetzten Stelle enthalten, es sind aber dabei solche Aufstellungen, die nicht eine, sondern z solcher Stellen aufweisen, nicht einmal, sondern eben z-mal gezählt. Man hat somit

$$\sum_y z f_n(y; x) = \binom{n}{x}N(N-1)^{n-x}N^{-n},$$

da, wie oben erwähnt, die Wahrscheinlichkeit jeder Aufstellung N^{-n} ist; daher mit $z = Ny$:

$$a(x) = \sum_y y f_n(y; x) = \binom{n}{x}(N-1)^{n-x}N^{-n} = w_n(x) \quad (4)$$

nach Gleichung (1). Um die Streuung s^2 zu finden, gehen wir ganz analog vor: Wir wählen zunächst $2x$ von den n Teilchen, was auf $\binom{n}{2x}$ Arten möglich ist, zerlegen sie zu je x in zwei Gruppen, was $\binom{2x}{x}$ Möglichkeiten ergibt, stellen diese auf eine der $\frac{1}{2}N(N-1)$ möglichen Weisen auf zwei unter den N Plätzen auf und verteilen schließlich die übrigen $n-2x$ Teilchen auf die noch freien $N-2$ Plätze, was in $(N-2)^{n-2x}$ verschiedenen Arten ausgeführt werden kann. In der durch das Produkt dieser vier Faktoren gegebenen Anzahl sind alle Aufstellungen mit mindestens zwei x-fach besetzten Plätzen enthalten, und zwar jene mit $z > 2$ solchen Plätzen

gerade $\frac{1}{2}z(z-1)$mal. Wir haben also die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\sum_y z(z-1)f_n(y;x) = \binom{n}{2x}\binom{2x}{x}\tfrac{1}{2}N(N-1)(N-2)^{n-2x}N^{-n},$$

aus der sich mit $z = Ny$ unter Berücksichtigung von (3) ergibt:

$$s^2(x) = \frac{1}{N^2}\Big[\sum_y z f_n(y;x) + \sum_y z(z-1)f_n(y;x)\Big] - a^2$$
$$= \frac{a}{N} + \Big(1-\frac{1}{N}\Big)\Big(1-\frac{2}{N}\Big)^n \frac{(N-2)^{-2x}n!}{(n-2x)!\,x!\,x!}$$
$$\Big[1-\frac{\Big(1-\frac{1}{N}\Big)^{2n-2x-1}}{\Big(1-\frac{2}{N}\Big)^{n-x}}\,\frac{n!\,(n-2x)!}{(n-x)!(n-x)!}\Big]$$

Da der Ausdruck in der eckigen Klammer sich bei großem N als negativ erweist, nämlich ungefähr gleich

$$-1-\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{(n-x)(n-x-1)\cdots(n-2x+1)} < 0,$$

während s^2 selbst notwendig positiv sein muß, haben wir in

$$s^2(x) < \frac{a}{N} = \frac{w_n(x)}{N} \qquad (5)$$

den Ausdruck dafür, daß die Streuung mit wachsendem N unbeschränkt gegen Null abnimmt, daß sich also die Verteilung $f_n(y;x)$ an der Stelle ihres Mittelwertes, d. h. für $y = w_n(x)$, mehr und mehr verdichtet. Wir drücken dies in dem Satz aus: 3. Es ist bei großem N mit erdrückender Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß die verhältnismäßige Anzahl der Stellen, an denen sich gerade x Teilchen befinden, sehr nahe bei $w_n(x)$ liegt, wobei für $w_n(x)$ der Wert (1), ev. bei großem n, aber endlichen ν, x der Wert (2) zu setzen ist. Auch hier ist vor jeder Beobachtung einer Anzahl Ny von Stellen mit x Teilchen eine Mischung der gesamten Emulsion vorgenommen zu denken.

Es ist zu beachten, daß in unserer Ableitung nirgends etwa die Folge der N Teilchenzahlen x, die den einzelnen Gitterpunkten entsprechen, als die den Elementen eines Kollektivs zugeordneten Merkmale aufgefaßt wurden; die Forderung der „Regellosigkeit" ist bei dieser Zahlenfolge nicht erfüllt.

Die übliche Darstellung des hier besprochenen Sachverhaltes schwankt zwischen der Auffassung, wonach die Aussagen 2 und 3 überhaupt nicht unterschieden werden, und jener, wonach 2 und 3 unabhängige Eigenschaften einer „virtuellen" bzw. einer „räumlichen" Gesamtheit bedeuten.

2. Das zweite Ausgangs-Kollektiv und seine Ableitungen. (Zeitgesamtheit.) Wir wählen jetzt als Grundlage der weiteren Betrachtungen folgendes Kollektiv. Element sei die Beobachtung eines Teilchens zu Beginn und zu Ende einer Zeitspanne τ, Merkmal die Lagenänderung in dieser Zeit, also die Angabe der drei Koordinaten des neuen Standortes bezogen auf den ursprünglichen. Nach der oben getroffenen Festsetzung läßt sich dieses Merkmal stets durch drei ganze Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu$ ausdrücken. Über die diesem Kollektiv zugehörige Verteilung setzen wir nur voraus, daß die Wahrscheinlichkeiten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ in bezug auf die Vorzeichen der $\varkappa, \lambda, \mu$ Symmetrie besitzen und daß die drei „Streuungs-Komponenten" untereinander gleich und von null verschieden sind, also

$$\sum_{\varkappa\lambda\mu} p_{\varkappa\lambda\mu} = 1, \quad \sum_{\varkappa}\varkappa p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_{\lambda}\lambda p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_{\mu}\mu p_{\varkappa\lambda\mu} = 0$$
$$\sum_{\varkappa}\varkappa^2 p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_{\lambda}\lambda^2 p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_{\mu}\mu^2 p_{\varkappa\lambda\mu} = r^2 \pm 0. \qquad (6)$$

Schließlich sollen nach jeder der drei Koordinatenrichtungen wenigstens zwei Verschiebungen, die sich nur um eine Einheit unterscheiden, möglich sein, was z. B. erfüllt ist, wenn außer p_{000} auch p_{001}, p_{010} und p_{100} nicht verschwinden.

Die Gleichungen (6) bringen zum Ausdruck, daß keine der drei Koordinatenrichtungen vor den anderen bevorzugt ist, wie es etwa durch den Einfluß einer äußeren Kraft bedingt sein könnte. Einer Ergänzung bedarf die Festsetzung über die $p_{\varkappa\lambda\mu}$ noch hinsichtlich des Verhaltens an den Grenzen. Wir nehmen entweder an, daß die Grenzen soweit entfernt seien, daß sie für alle unsere Fragen ohne Bedeutung bleiben, oder wir denken uns jedes Teilchen, wenn es die begrenzende Wand erreicht, an dieser reflektiert und so den Punkten außerhalb unseres Bereiches bestimmte innere Punkte zugeordnet. Bei der letzteren Annahme wird, wie bekannt, der Einfluß etwaiger zu Beginn der Beobachtung außerhalb der Grenzen liegender Teilchen auf das Innere richtig beurteilt. Jedenfalls können wir in der einen oder anderen Weise die Werte der $p_{\varkappa\lambda\mu}$ von der Anfangslage des Teilchens unabhängig ansehen und sonach feststellen: 1'. Die Verschiebung eines Teilchens im Zeitraum τ um die Strecken $\varkappa a$, λa, μa in den drei Koordinatenrichtungen besitzt — laut Annahme — die Wahrscheinlichkeit $p_{\varkappa\lambda\mu}$, für die (6) gilt.

Durch „Verbindung" von m Kollektivs, die alle dem eben besprochenen gleich sind, entsteht ein neues, dessen Element die Beobachtung eines Teilchens durch m aufeinander-

folgende Zeitspannen und dessen Merkmal die Angabe der $3m$, die m Lagenänderungen charakterisierenden Zahlen $\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1, \varkappa_2 \cdots \mu_m$ bildet. Wir vollziehen an dem Ergebnis dieser Verbindung eine „Mischung", indem wir alle jene Merkmale zusammenwerfen, die gleiche Summe der $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots \varkappa_m = \varkappa$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_m = \lambda$ und $\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_m = \mu$ ergeben, und bezeichnen die zugehörige Wahrscheinlichkeit einer Verschiebung $\varkappa\alpha, \lambda\alpha, \mu\alpha$ mit $v_m(\varkappa, \lambda, \mu)$. Nach dem „ersten Fundamentalsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung" wird unter den für die $p_{\varkappa\lambda\mu}$ gemachten Voraussetzungen, bei großem m:[1]

$$v_m(\varkappa, \lambda, \mu) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi r^2 m)^3}} e^{-\frac{\varkappa^2+\lambda^2+\mu^2}{2r^2 m}} \qquad (7)$$

Die genaue Form dieser Funktion ist übrigens für uns nicht weiter von Bedeutung, wichtig ist nur: $2'$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen in m aufeinanderfolgenden Zeitspannen die Lagenänderung $\varkappa\alpha$, $\lambda\alpha$, $\mu\alpha$ erfährt, wird durch eine Funktion $v_m(\varkappa, \lambda, \mu)$ dargestellt, die sich bei großem m so verhält wie der Ausdruck (7). Die Nachprüfung dieses Satzes muß man sich so denken, daß zuerst alle Teilchen durcheinandergemengt, dann zu Beginn und zu Ende des Zeitraumes $m\tau$ die Lagen des hervorgehobenen Teilchens beobachtet werden; dann wird wieder künstlich gemengt und beobachtet usf. in infinitum.

Wir gehen nun zu zwei Kollektivs über, die durch verschiedene „Mischungen" aus einer und derselben „Verbindung" entstehen. Seien wieder, wie früher, die einzelnen Standorte der Teilchen durchlaufend mit den Ziffern 1 bis N bezeichnet und es sei eine „Aufstellung" von n Teilchen durch Angabe der auf die einzelnen Standorte entfallenden Teilchenzahlen $n_1, n_2, \cdots n_N$ gegeben. Zur Abkürzung schreiben wir für diese N Zahlen, deren Summe n ist, auch $\mathfrak{n}$ (Vektor mit den Komponenten $n_1, n_2 \cdots n_N$). Element eines Kollektivs sei nun zunächst die Beobachtung der n Teilchen zu Beginn und zu Ende der Zeit τ. Jedem der möglichen Systeme von Lagenänderungen entspricht als Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Produkt von n Faktoren $p_{\varkappa\lambda\mu}$. Wird aber als Merkmal nur die neue „Aufstellung" $\mathfrak{n}'$, die durch die N Anzahlen $n_1', n_2' \cdots n_N'$ gegeben ist, betrachtet, so hat man eine von $\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{n}''$ abhängige Funktion $V(\mathfrak{n}'; \mathfrak{n})$ als Wahrscheinlichkeit für den Übergang von $\mathfrak{n}$ zu $\mathfrak{n}'$, gleich einer Summe gewisser jener Produkte. Verbindet man nun m Kollektivs dieser Art, so erhält man als Wahrscheinlichkeit für die Aufeinanderfolge der Zustände $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}', \mathfrak{n}'' \cdots \mathfrak{n}^{(m)}$ das Produkt $V(\mathfrak{n}'; \mathfrak{n}) V(\mathfrak{n}''; \mathfrak{n}') \cdots V(\mathfrak{n}^{(m)}; \mathfrak{n}^{(m-1)})$. Uns interessieren nur zwei Mischungen aus diesem Kollektiv.

Einmal werfen wir alle jene Folgen von m Aufstellungen zusammen, bei denen am Schluß, d. i. nach der Zeit $m\tau$, sich in einem bestimmten Standort gerade x Teilchen befinden, also so, daß etwa $n_1^{(m)} = x$. Um die zugehörige Wahrscheinlichkeit $f_{n,m}(x)$ zu finden, müßten wir eigentlich die Summe aller Produkte $V(\mathfrak{n}'; \mathfrak{n}) \cdots V(\mathfrak{n}^{(m)}; \mathfrak{n}^{(m-1)})$ bei festgehaltenen $n_1, n_2 \cdots n_N$ und $n_1^{(m)} = x$ bilden. Man gelangt aber zu demselben Resultat, wenn man bedenkt, daß eine der fraglichen Schlußaufstellungen nur dadurch zustande kommen kann, daß von den n_i Teilchen, die zu Anfang die Koordinaten $\varkappa_i\alpha$, $\lambda_i\alpha$, $\mu_i\alpha$ gehabt haben mögen, gerade z_i die Verschiebung $(\varkappa_1 - \varkappa_i)\alpha$, $(\lambda_1 - \lambda_i)\alpha$, $(\mu_1 - \mu_i)\alpha$ erfahren, wobei $z_1 + z_2 + \cdots z_N = x$ ist. Setzen wir $\varkappa_1 = \lambda_1 = \mu_1 = 0$, betrachten also die Teilchenzahl x im Anfangspunkt des Koordinatensystems, und schreiben wir für $v_m(\varkappa_i, \lambda_i, \mu_i)$ kurz v_i, so muß $f_{n,m}(x)$ der Koeffizient von t^x in der Entwicklung des Produktes

$$\prod_{i=1}^{N} (1 - v_i + t v_i)^{n_i} \qquad (8)$$

sein. Denn dieser Koeffizient umfaßt alle Produkte von der Form $v_i^{z_i}(1-v_i)^{n_i - z_i}$ mit der Bedingung $z_1 + z_2 + \cdots z_N = x$, jedes Produkt mit dem Zahlenfaktor versehen, der den verschiedenen Auswahlmöglichkeiten von z_i Teilchen unter n_i entspricht.

Es ist nicht schwer, die Koeffizienten $f_{n,m}(x)$ von (8) zu berechnen, wenn man voraussetzt, daß n groß wird, dabei aber

$$\nu = \sum_{i=1}^{N} v_i n_i \qquad (9)$$

endlich bleibt, so daß alle v_i als kleine Brüche anzusehen sind. Vor allem wird

$$f_{n,m}(0) = \prod (1 - v_i)^{n_i} =$$
$$= e^{-\sum n_i l n (1 - v_i)} \sim e^{-\sum n_i v_i} = e^{-\nu}, \qquad (10)$$

wenn man die höheren Potenzen der v_i vernachlässigt. Weiter hat man für endliches x:

$$f_{n,m}(x) =$$
$$= f_{n,m}(0) \sum_{\alpha_1=1}^{n} \cdots \sum_{\alpha_x=1}^{n} \frac{v_{\alpha_1} v_{\alpha_2} \cdots v_{\alpha_x}}{(1 - v_{\alpha_1})(1 - v_{\alpha_2}) \cdots (1 - v_{\alpha_x})}$$
$$\sim \frac{1}{x!} e^{-\nu} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{1 - v_i} \right]^x \sim \frac{e^{-\nu} \nu^x}{x!}, \qquad (10')$$

1) Vgl. meine „Fundamentalsätze" l. c. S. 24 und insbesondere S. 68 ff.

wobei die Summierung von 1 bis n so zu verstehen ist, daß jedes v_i genau n_i-mal in Rechnung gestellt wird (indem man sich [8] als Produkt von n-Faktoren ausgeschrieben denkt). Daß aber der durch (9) definierte Ausdruck v bei großem m in den oben verwendeten Wert $v = n : N$ übergeht, sieht man so ein: Wenn m sehr groß wird, geht das Verhältnis zweier v_i-Werte für die Punkte $\varkappa, \lambda, \mu$ und $\varkappa', \lambda', \mu'$ nach (7)

$$e^{-\frac{(\varkappa^2-\varkappa'^2)+(\lambda^2-\lambda'^2)+(\mu^2-\mu'^2)}{2m\tau^2}}$$

infolge des Nenners im Exponenten mehr und mehr gegen 1. Es werden also die N Werte v_i allmählich einander gleich, und somit gleich $1 : N$, daher $v = \frac{1}{N}(n_1 + n_2 + \cdots n_N) = n : N$.

Das Bemerkenswerteste an diesem Resultat ist die Unabhängigkeit des $f_{n,m}(x)$ von der Anfangsaufstellung. Wir fassen es dahin zusammen:

3'. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß n Teilchen von einem beliebigen Anfangszustand aus, im Verlaufe der Zeit $m\tau$, in einen Zustand übergehen, bei dem an einer bestimmten Stelle sich gerade x Teilchen befinden, hat bei großem m und n denselben Wert $w_n(x)$, der in (2) als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Teilchenzahl x in einem Punkte gefunden wurde. Man erkennt, daß nur das allgemeine Verhalten von (7) bei großem m von Einfluß auf dieses Ergebnis war. — Der Unterschied in der Bedeutung von $f_{n,m}(x)$ und $w_n(x)$ wird einleuchtend, wenn man sich vorstellt, daß die Aussage des Satzes 3' eine unendliche Folge von Beobachtungen der bestimmten Zeitdauer $m\tau$, nach jedesmal vorausgegangener Durchmengung der Teilchen (und Abwarten einer bestimmten Anfangsaufstellung) voraussetzt, während für Satz 2 lediglich die Beobachtung eines Augenblicks nach der Durchmengung in Betracht kommt.

Die zweite „Mischung", die wir in der Folge von m Aufstellungen der n Teilchen vornehmen, besteht darin, daß wir alle jene Folgen zusammenwerfen, bei denen die Teilchenzahl x im Nullpunkt gerade my-mal auftritt. Doch wollen wir, um wieder großen rechnerischen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, jetzt annehmen, daß zwischen je zwei beobachteten Aufstellungen nicht eine Zeitspanne τ liegt, sondern deren m', wobei m' groß genug sei, um die Anwendung des eben abgeleiteten Satzes 3' zu gestatten. Wir haben dann sehr einfach für den Übergang von einer Aufstellung zur nächsten, unabhängig von m' und unabhängig vom Ausgangszustand, die Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$ einzuführen. Nach bekannten Regeln der Kombinatorik ist somit die Wahrscheinlichkeit $F_{n,m}(y; x)$ für ein my-maliges Auftreten der Zahl x der Koeffizient von t^{my} in der Entwicklung der m-ten Potenz

$$[1 - w_n(x) + t w_n(x)]^m$$

also gleich

$$F_{n,m}(y; x) = \binom{m}{my} w_n{}^{my}(x)\,[1 - w_n(x)]^{m-my} \qquad (11)$$

Diese Verteilung hat, wie bekannt[1]), den Mittelwert $w_n(x)$ und die Streuung $2\,w_n(x)[1 - w_n(x)] : m$. Die Streuung geht daher mit wachsendem m gegen Null, d. h. die Verteilung verdichtet sich mehr und mehr an der Stelle $y = w_n(x)$ und man hat das Resultat: 4'. Es ist bei großem m und n mit erdrückender Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß in einer Aufeinanderfolge von m (genügend voneinander entfernten) Aufstellungen die Anzahl x von Teilchen in einem festen Punkt mit der verhältnismäßigen Häufigkeit $w_n(x)$ von Gleichung (1) bzw. (2) auftritt. Man kann sich hinterher von der Beschränkung, daß die Beobachtungszeiten weit auseinander liegen müssen, befreien, wenn man bedenkt, daß jeder Zwischenzeitpunkt zum Ausgang einer Aufeinanderfolge, die die gleiche relative Häufigkeit ergibt, gewählt werden kann.

Damit ist die Reihe der Sätze abgeschlossen, durch welche die einwandfreie Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Theorie der Brownschen Bewegung begründet wird.

3. Beziehungen zum mechanischen Ansatz und zur bisherigen Behandlungsweise. Wir wollen uns zunächst davon überzeugen, daß kein Widerspruch zwischen den vorstehend abgeleiteten Ergebnissen und dem, wozu die Differentialgleichungen der Bewegung führen, besteht. In bekannter Weise setzt man für ein Teilchen von der Masse m, das einem linear mit der Geschwindigkeit wachsenden Zähigkeitswiderstand und eine „Störungskraft" S unterworfen ist:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{dx}{dt} + S. \qquad (12)$$

Wird beiderseits mit x multipliziert, dann von 0 bis t unter der Anfangsbedingung $x = 0$ für $t = 0$ integriert, so erhält man, wenn der Querstrich das über den Zeitraum t erstreckte Zeitmittel bezeichnet:

$$\frac{m}{2}\frac{d(x^2)}{dt} + \frac{f}{2}x^2 = \overline{Sx} + \frac{m}{2}\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \qquad (13)$$

1) Sie ist nämlich nichts anderes als die Verteilung des Bernoullischen Gesetzes.

Nun pflegt man zu sagen[1]), für $t = \infty$ sei das Zeitmittel der lebendigen Kraft nach den Grundsätzen der statistischen Mechanik gleich kT (T = absolute Temperatur, k = Gaskonstante durch $2 \times$ Avogadrosche Zahl) und das Zeitmittel von Sx gleich Null zu setzen. Dann besagt die Gleichung (13) für die Größe

$$u = x^2 - \frac{2kT}{f}\left(t - \frac{m}{f}\right)$$

daß $u:t$ mit wachsendem t gegen Null gehen muß (weil für genügend große t das Vorzeichen von $du:dt$ dem von u entgegengesetzt wird, sobald nicht $u:t$ an sich schon verschwindend klein), also

$$\lim_{t=\infty} \frac{x^2}{t} = \frac{2kT}{f} \qquad (14)$$

Diese bestimmte Aussage über den Ablauf der Bewegung eines Teilchens wäre tatsächlich ein Widerspruch gegen unsern Satz 2′, wonach über die Verschiebung zu jeder Zeit eine Wahrscheinlichkeitsaussage gemacht werden kann: Wenn jedes Teilchen sich nach (14) bewegen müßte, so könnte man nicht von einer Wahrscheinlichkeit dafür sprechen, daß ein Teilchen nach sehr langer Zeit z. B. an seinem Ausgangspunkt zu finden ist. Dieser Widerspruch rührt aber nur her von einer falschen Anwendung der Statistik bei der Ableitung von (14). Nur die Ergodenhypothese, die wir eben ablehnen, führt zu der Aussage, daß der zeitliche Mittelwert der lebendigen Kraft beim wirklichen Bewegungsablauf eines Teilchens kT sein muß. Die rationelle Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie wir sie hier vertreten, führt allein zu dem Satz: Wenn man ein Teilchen unendlich oft, nach jedesmal vorhergegangener Durchmengung der ganzen Emulsion, durch eine Zeit t betrachtet, dann wird im Durchschnitt der Fälle jener Mittelwert und damit (14) bestehen. Denn nach Analogie zu unserem Satz 4′ gilt hier die Behauptung, daß in der erdrückenden Mehrheit der Fälle jeder Wert, dessen die lebendige Kraft fähig ist, mit einer zeitlichen Häufigkeit auftritt, die seiner Wahrscheinlichkeit, errechnet aus dem ersten Ausgangs-Kollektiv, gleich kommt; daher muß das Zeitmittel im Durchschnitt der unendlich viel Fälle gleich dem „virtuellen" Durchschnitt sein. Dieselbe Beziehung besteht auch für den Mittelwert Sx. Somit läßt sich aus dem mechanischen Ansatz (12) überhaupt nicht (14) ableiten, sondern nur

$$\lim_{t=\infty} \frac{\sum x^2 v(x)}{t} = \frac{2kT}{f} \qquad (15)$$

wo $v(x)$ die Wahrscheinlichkeit einer Verschiebung von der Größe x bedeutet und die Summe über alle möglichen x-Werte zu erstrecken ist. Diese Gleichung aber steht in vollkommener Übereinstimmung mit (7). Reduziert man nämlich (7) auf den Fall eindimensionaler Bewegung und setzt man $x = \alpha\varepsilon$, $t = m\tau$ ein, so erhält man für $v(x)$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2 m}}\, e^{-\frac{x^2}{2\tau^2\alpha^2 m}}$$

und daraus, bei genügend großem m:

$$\sum x^2 v(x) = \tau^2\alpha^2 m = \frac{\tau^2\alpha^2}{\tau}\, t,$$

womit (15) tatsächlich erfüllt wird, wenn man

$$\frac{\tau^2\alpha^2}{\tau} = \frac{2kT}{f} \qquad (16)$$

annimmt. Der „mechanische Ansatz" liefert also keineswegs ein Ergebnis, das mit dem der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Konkurrenz tritt, sondern legt nur den Zusammenhang zwischen den die Ausgangsverteilungen bestimmenden Größen τ, α, τ und physikalischen Variablen fest. Dies ist die Rolle, die den physikalischen Gesetzen auf jedem Gebiet der physikalischen Statistik zufällt.

Es mag noch schließlich eine Bemerkung über das Verhältnis der hier vorliegenden Betrachtungen zu den wahrscheinlichkeits-theoretischen Untersuchungen über die Brownsche Bewegung von v. Smoluchowski u. a. Platz finden. Man pflegt bei diesen Untersuchungen von einem „optisch isolierten" Bereich innerhalb der Emulsion auszugehen, der unserer Auffassung gegenüber noch sehr viele „Standorte" umfaßt, aber doch nicht mehr, als daß die auf ihn entfallende Durchschnittszahl ν klein genug ist, um eine Anwendung der Näherung (2) zu rechtfertigen. Es entspricht dann der üblichen, auf einer stillschweigend eingeführten „Ergodenhypothese" beruhenden Anschauung, daß zwischen der Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$, dann der räumlichen und endlich der zeitlichen Häufigkeit des Auftretens einer Teilchenzahl x nicht unterschieden wird. Hier greifen unsere Sätze 3 und 4′ ein, die also nur eine prinzipielle Lücke der Theorie beseitigen, an ihrem Fortgange aber nichts ändern — abgesehen davon, daß sie den Ergebnissen eine

1) Z. B. Ph. Frank, Sitzungsber. Ak. Wien 124 (1915), Abt. IIa S. 1173—1186. Wenn man, wie es Langevin bei seiner ursprünglichen Herleitung (C. R. Paris 146 [1908], S. 530) getan hat, von vornherein nur von räumlicher Mittelwertbildung ausgeht, so hat man prinzipiell den gleichen Widerspruch wie den im Text nachgewiesenen. Auch eine Aussage über das tatsächliche Verhalten des Durchschnittes der einmal vorhandenen Teilchen ist unvereinbar mit Wahrscheinlichkeitsannahmen.

widerspruchsfreie Fassung zu geben ermöglichen. Es sind aber noch weiter erhebliche Schwierigkeiten mathematischer Natur in der Durchführung des exakten Ansatzes zu überwinden, wenn man die in kurz aufeinanderfolgenden Zeiten eintretenden Schwankungen verfolgen will. Hier müßte, wie oben angedeutet, die ganze Reihe der durch je N Zahlen gegebenen „Aufstellungen" $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ ..... betrachtet werden, da nur bei großem m, d. h. bei langen Zeitintervallen, die Wahrscheinlichkeiten vom Vorzustand unabhängig ausfallen. Es ist die wesentliche Leistung Smoluchowskis, daß er diese schwierige, vielleicht zurzeit kaum durchführbare Rechnung durch einen einfachen Näherungsweg ersetzt hat, indem er eine gewisse „summarische" Wahrscheinlichkeit P für den Eintritt eines Teilchens aus der Umgebung in das optisch abgegrenzte Gebiet definiert und verwendet[1]). In dieser praktischen Hinsicht spielt also die Smoluchowskische Theorie der Schwankungen oder der „Wahrscheinlichkeits-Nachwirkung" der von uns angedeuteten gegenüber eine ähnliche Rolle, wie etwa die Verwendung der Telegraphengleichung gegenüber dem Ansatz der Maxwellschen Theorie u. dgl. Es tut dem hohen Werte der Smoluchowskischen Arbeiten keinen Abbruch, wenn im vorstehenden versucht worden ist, die Grundlinien einer etwas umfassenderen, von gewissen Widersprüchen befreiten Theorie zu skizzieren, die jene Ansätze von etwas weiterer Warte zu übersehen gestattet.

1) Vgl. insbes. Sitzungsber. Akad. Wien Abt. IIa, **123**, 2381—2409, 1914; **124**, 263—276, 1915 und 339 bis 368.

(Eingegangen 18. Dezember 1919.)

Die physiologische Erklärung des „Tellermondes".

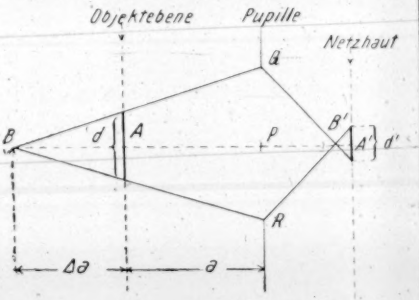
Von Georg Jaeckel.

Die im Briefkasten der Physikalischen Zeitschrift[1]) aufgeworfene Frage: Wie groß ist der Mond? veranlaßt mich, eine vorläufige Mitteilung über einen Teil meiner Arbeit über die physiologischen Grundlagen der Beurteilung der Größe und Entfernung von irdischen Objekten und Himmelskörpern herauszugeben, der sich speziell mit dieser Frage beschäftigt und sich gerade auf das angegebene Experiment stützt, daß die Mondgröße sich durch Vorhalten einer Blende vor das Auge zu verringern scheint. In dieser Arbeit wird nämlich gezeigt, daß die viel umstrittene Frage nach der Referenzfläche der Himmelskörper sich notwendig aus den rein physikalisch-physiologischen Grundlagen der optischen Abbildung im menschlichen Auge ergibt, und daß die Bezugsentfernung der Gestirne sich aus dem Pupillendurchmesser und dem Auflösungsvermögen des Auges berechnen läßt. Diese Referenzfläche ist nämlich nichts anderes als diejenige Entfernung, bei welcher infolge der Netzhautstruktur eine Unterscheidung von der Einstellung auf Unendlich beginnt.

1) Diese Zeitschr. **21**, 168, 1920.

Die Bedingung, daß zwei Punkte A und B gleichzeitig scharf gesehen werden, ist, daß bei Einstellen der Augenlinse auf Punkt A der Punkt B nicht merklich unscharf abgebildet wird, d. h. daß der Durchmesser des vom Punkte B herrührenden Zerstreuungskreises nicht größer sein darf als der Abstand zweier Netzhautelemente; denn erst in diesem Fall kann das Auge die Unschärfe feststellen.

Zur näheren Erläuterung diene die folgende Figur:



Punkt A und B liegen auf der Augenachse. Das Auge sei auf Punkt A eingestellt, der infolgedessen in dem Punkte A' der Netzhaut abgebildet wird; P sei der Mittelpunkt, $QR = p$ die Öffnung der Augenpupille; senkrecht zur Augenachse steht im Punkte A die Objektebene, im Punkte A' die Bildebene. Der entferntere Punkt B bildet sich in B' vor der Netzhaut ab; der abbildende Strahlenkegel gibt auf der Objektebene den Zerstreuungskreis mit dem Durchmesser d, auf der Netzhaut den Zerstreuungskreis mit dem Durchmesser d'.

Ist nun der Durchmesser dieses Zerstreuungkreises kleiner als der Abstand zweier Netzhautelemente, dann macht das Auge keinen Unterschied mehr in der Tiefenwahrnehmung zwischen den beiden Punkten A und B. Unbewußt versetzen wir die Himmelskörper, über

deren wirkliche Entfernung wir aus der direkten Sinneswahrnehmung nicht unterrichtet sind, in die geringste, mit den sonstigen Beobachtungen verträgliche endliche Entfernung; und deswegen ist diejenige endliche Entfernung, bei der das Auge die Zerstreuungskreise der im Unendlichen liegenden Punkte zu bemerken anfängt, die sogenannte „Referenzfläche" der Himmelskörper. Die zahlenmäßige Berechnung der Referenzfläche auf Grund dieser Annahme ergibt eine vollkommene Übereinstimmung mit dem bekannten Werte von ungefähr 20 m.

Besonders einfach können wir den Zusammenhang zwischen der Tiefenschärfe und den optischen Konstanten des Auges erhalten, wenn wir bedenken, daß der Zerstreuungskreis auf der Netzhaut ein Abbild des Zerstreuungskreises auf der Objektebene ist. Da das Auge zwei Punkte erst voneinander trennen kann, wenn ihr Winkelabstand größer als 35″ ist, so kann das Auge eine Unschärfe von B auch nur bemerken, wenn der Durchmesser d ihm unter einem Winkel erscheint, der größer als 35″ ist. Setzen wir

Objektabstand $AP = a$,
Merkbarer Tiefenunterschied $BA = \Delta a$,
Pupillendurchmesser $QR = p$,

so ergibt sich daraus die wichtige Beziehung:

$$\frac{d}{a} = \frac{35}{60 \cdot 60 \cdot 57{,}3} = \frac{1}{\beta}, \text{ wo } \beta = 5{,}9 \cdot 10^3. \quad (1)$$

Andererseits folgt nach dem Strahlensatz:

$$\frac{d}{p} = \frac{a}{a + \Delta a}. \quad (2)$$

Die Elimination von d liefert:

$$\frac{a}{\beta \cdot p} = \frac{a}{a + \Delta a},$$

$$\Delta a = \frac{a^2}{\beta \cdot p - a}. \quad (3)$$

Diese Formel gibt die Tiefenschärfe bei monokularem Sehen an und wird allgemein mit ziemlicher Genauigkeit durch die Wundtschen Versuche[1]) bestätigt, wie an anderer Stelle gezeigt werden soll. Hier interessiert nur der Grenzfall, daß der Punkt B im Unendlichen, der Punkt A in endlicher Entfernung liegt, wo also $\Delta a = \infty$ werden soll; das ist nur möglich, wenn:

$$a = \beta \cdot p. \quad (4)$$

Anschaulicher kann man das Resultat in diesem Spezialfall erhalten, wenn man aus der Figur entnimmt, daß

für $BP = \infty$; $d = p$

wird, d. h. also der Zerstreuungskreis in der Objektebene so groß wie die Pupille selbst wird. Gleichung (4) folgt dann schon aus Gleichung (1) und a erhält damit eine sehr anschauliche Bedeutung: es ist die Entfernung, in welcher die Augenpupille des Beobachters für einen zweiten Beobachter mit gleicher Sehschärfe vom flächenhaften zum punktförmigen Aussehen übergeht.

Die Zahlenwerte für den Abstand der Referenzfläche sind:

$a = 12$ m für Pupillendurchmesser $p = 2$ mm
$a = 18$ „ „ „ $p = 3$ „
$a = 24$ „ „ „ $p = 4$ „

usw.

und (bei nächtlicher Beobachtung der Gestirne): $a = 47$ m für Pupillendurchmesser $p = 8$ mm. Die Werte für a liegen also vollkommen in der Größenordnung des erwarteten Abstandes der Referenzfläche der Himmelskörper.

Und je nachdem wir nun den Mond, der stets unter demselben Sehwinkel von 31″ (= 0,009 in Bogenmaß) erscheint, in einer Entfernung von 12, 18, 24 oder 47 m vermuten, schreiben wir ihm die Größe eines Tellers von 11, 16, 21 oder 42 cm Durchmesser zu, da wir unbewußt den Sehwinkel mit der geschätzten Entfernung multiplizieren.

Eine notwendige Folge der soeben entwickelten Theorie ist, daß sich der Radius a der Referenzfläche und somit auch die scheinbare Größe der Himmelskörper mit dem Pupillendurchmesser ändern muß. Das ist ja auch ganz einleuchtend, denn: die Abblendung der Linse steigert die Tiefenschärfe (wie ja auch aus der Photographie allgemein bekannt ist); wir können deswegen bei verengerter Pupille den Mond mit stärker gewölbter Augenlinse scharf sehen; und, da wir mangels sonstiger Anhaltspunkte die Entfernung hochstehender Himmelskörper nur nach der Akkommodation beurteilen können, so vermuten wir den Mond in geringerer Entfernung und halten ihn infolgedessen für kleiner.

Die Versuche von Stroobant[1]) und die von Herrn Stefan Meyer beschriebenen Experimente entsprechen vollkommen den Erwartungen; ich habe selbst seit mehreren Monaten an einer Reihe von Versuchspersonen ähnliche Versuche gemacht, habe sie bei Voll-

1) Vgl. Helmholtz, Physiologische Optik, 3. Aufl., 3, 245, 246, 1910.

1) Stroobant fand, daß in einem dunklen Zimmer der Durchmesser einer von hinten gleichmäßig beleuchteten, ölgetränkten Papierscheibe sich um $^3/_{10}$ verkleinerte, wenn das Auge plötzlich durch eine Lampe erhellt wird, und die Pupille sich kontrahiert (Bulletin de l'Acad. Royale de Belgique, 3. Serie 8, 719, 1884 und 10, 315, 1885).

mond plötzlich enge Blenden vor das Auge halten lassen; sie waren sämtlich überrascht von dem augenscheinlichen „Kleinerwerden" des Mondes. — Gegen die Beweiskraft dieser Versuche könnte man einwenden, daß die scheinbare Verkleinerung des Mondes durch den Fortfall der Irradiation erklärt wird; aber das auch von Herrn Meyer erwähnte Fortbestehen der Erscheinung, wenn der Mond am hellen Tageshimmel steht, widerlegt diesen Einwand.

Den gegen meine Theorie vielleicht noch möglichen Einwand, daß es ein Abschätzen der Entfernung nach der Akkommodation allein nicht gibt, möchte ich dadurch zurückweisen, daß es nach den Feststellungen von Wundt zwar keine genaue direkte Entfernungsschätzung nach der Akkommodation gibt, wohl aber eine Wahrnehmung von Entfernungsunterschieden; ausführlicher werde ich darauf an anderer Stelle eingehen.

Die scheinbare Vergrößerung der Gestirne in der Nähe des Horizonts kann zum Teil durch die Veränderung des Pupillendurchmessers erklärt werden; ebenso einige Versuche, die für die Blickrichtungstheorie zu sprechen scheinen, die sich aber in vielen Fällen durch ein teilweises Abblenden der Augenpupille durch Teile der Augenumgebung bei ungünstigen Blickrichtungen erklären lassen. — Vor allem aber scheint mir für die Richtigkeit der Theorie die Tatsache zu sprechen, daß sich nach ihr die Größe des Tellermondes aus den optischen Konstanten des Auges berechnen läßt.

Berlin, Physikalisches Institut der Landwirtschaftlichen Hochschule, 8. April 1920.

(Eingegangen 12. April 1920.)

Schallgeber und Schallempfänger. III.

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Wir haben in früheren Arbeiten[1]) eine Theorie elektromagnetisch erregter Schallgeber und Schallempfänger, bei denen die elektromagnetische Wirkung durch Vibrieren eines Eisenankers gegenüber einem Elektromagneten erzeugt wird, und wie sie beispielsweise in gewöhnlichen Telephonen vorliegen, gegeben, indem wir die mechanisch-akustischen Vorgänge elektrisch gedeutet und durch elektrische Größen gedanklich ersetzt haben. Diese Art von Schallapparaten haben wir elektromechanische Transformatoren genannt. In der vorliegenden Arbeit wollen wir auf ähnliche Weise Schallgeber und in einer späteren Abhandlung Schallempfänger behandeln, deren Erregung bzw. Abbremsung durch eine in einem konstanten Magnetfeld schwingende Spule erfolgt. Für diese Art elektromagnetisch erregter Schallapparate ist im besonderen bereits der Name des „elektrodynamischen Telephons" vorgeschlagen worden; wir wollen sie allgemeiner „Spulen-Schallgeber bzw. -empfänger" nennen.

Der Spulen-Schallgeber.

I. Der elektrische Ersatzkreis.

Die einfachste Ausführungsform eines durch eine Spule erregten Schallapparates ist in Fig. 1 dargestellt. Es ist M die Membran, die

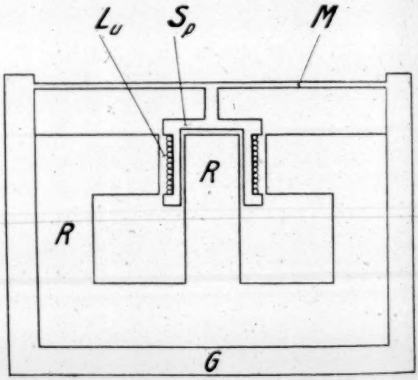


Fig. 1.

an das schallübertragende Medium angrenzt und G ein Gehäuse, an dem außer dieser Membran ein ringförmiger Magnet R befestigt ist. In dem von einem magnetischen Kraftlinienfelde durchsetzten Luftspalt Lu befindet sich eine Spule Sp, die starr an der Membran befestigt ist. Führt man ihren beiden Enden elektrischen Wechselstrom zu, so vollführt sie Schwingungen, die vermittelst der Membran auf das Medium übertragen werden. Erregt man diesen Schallgeber mit konstanter Stromstärke, d. h. konstanter Kraft bei veränderlicher Frequenz, so beschreibt ein zwischen Maschine und Apparat geschaltetes Wattmeter eine Resonanzkurve, ähnlich wie in den früheren Arbeiten für den magnetischen Schallgeber näher erläutert ist. Die auftretenden Verluste sind im Gegensatz zum elektro-mechanischen Transformator im wesentlichen Spulenverluste und nur zum ganz

1) Diese Zeitschr., 20, 104 u. 245, 1919.

geringen Teil Eisenverluste. Denn trotzdem in der Spule *Sp* Wechselstrom fließt, ist für die Wirkung dieses Schallgebers kein wechselndes Magnetfeld im Eisen notwendig. Es könnte im Gegenteil nur schädlich wirken, indem es die Verluste erhöht. Man wird, um es nach Möglichkeit zu unterdrücken, den Magneten aus Volleisen bauen und auf die Magnetpole Kurzschlußwicklungen legen. Trotzdem wird eine, wenn auch geringe Selbstinduktion übrigbleiben, die im wesentlichen von den Kraftlinien herrührt, die sich innerhalb des Luftspaltes schließen. — Bei der Aufstellung des Diagramms und bei der Herleitung der Beziehungen zwischen den elektrischen und mechanischen Größen wollen wir nur den hiervon herrührenden Selbstinduktionskoeffizienten berücksichtigen und das Eisen frei von Wechselfeldern annehmen.

Wir stellen uns ähnlich wie beim elektromechanischen Transformator die Aufgabe, den mechanisch-akustischen Arbeitsvorgang der schwingenden Spule im Zusammenhange mit Membran und Medium durch rein elektrische Vorgänge zu ersetzen. Mit anderen Worten: Wir suchen eine elektrische Anordnung, die wir so substituieren können, daß es einem Beobachter nicht möglich wäre zu entscheiden, ob er den Apparat mit der schwingenden Spule oder den festen elektrischen Ersatzkreis vor sich hat. Dieser Beobachter soll mit allen möglichen Meßinstrumenten ausgerüstet sein, kann die Maschine bezüglich Frequenz und Erregung variieren und alle erdenklichen Messungen an den Klemmen der zum Apparat führenden Zuleitungen vornehmen. Der einzuführende Ersatzkreis soll dann so beschaffen sein, daß er keine Abweichung der Angaben der Meßinstrumente hervorruft und es daher dem Beobachter unmöglich macht, einen Unterschied zwischen Ersatzkreis und Spulenbewegung zu konstatieren. Wenn dies erreicht ist, wird für die Ableitung und Aufstellung des Diagramms und der Gesetze des Spulenschallgebers der elektrische Arbeitsvorgang im elektrischen Ersatzkreis an Stelle des akustisch-mechanischen der schwingenden Spule gesetzt werden können.

Ein elektrischer Kreis, der diesen Bedingungen genügt, ist in Fig. 2 dargestellt. An die Klemmen der Maschine *Ma* ist an Stelle der Spule *Sp* der Fig. 1 ein Widerstand w_v angeschlossen, der dem Ohmschen Widerstand der Spule und etwa vorhandenem Verlustwiderstande durch restliche Selbstinduktionsfelder im Eisen entspricht, und in Serie mit diesem ein Widerstand w_s, der den Arbeitswiderstand der Spulenbewegung darstellt. Gleichfalls in Serie mit diesem Widerstande liegt eine Selbstinduktion L_v, die der etwa vorhandenen freien Selbstinduktion der Spule *Sp* entspricht. Parallel zum Widerstande w_s liegen eine Selbstinduktion L_s und ein Kondensator C_s, die verlustlos und für die Resonanzfrequenz ω_R aufeinander abgestimmt sein sollen. Sie entsprechen der Membranelastizität und der Schwingungsmasse und stehen mit dieser Festsetzung im Gegensatz zu der gewöhnlichen Bezeichnungsweise, in der das elektrische Analogon einer mechanischen Masse eine Selbstinduktion und dasjenige einer Elastizität eine Kapazität ist. Vergleichen wir aber den von uns aufgestellten elektrischen Ersatzkreis und die mechanisch schwingende Spule miteinander, so finden wir, daß die Schwingungsenergie im Ersatzkreise in der Kapazität in Form von Ladungsenergie steckt, wenn sie gleichzeitig in dem mechanischen Schwingungssystem ihr Maximum in kinetischer Form erreicht hat, und daß sie im Ersatzkreis in magnetischer Feldenergie in der Selbstinduktion enthalten ist, wenn ihr mechanisches Äquivalent seinen größten potentiellen Wert erreicht hat. Wir erkennen dies am einfachsten, wenn wir den Fall der Resonanz betrachten, in dem mechanische Geschwindigkeit und mechanische Kraft gleichphasig sein müssen. Der mechanischen Kraft gleichphasig und gleichwertig ist stets die elektrische Stromstärke i. Erreicht also die mechanische Geschwindigkeit ihr Maximum, so ist dasselbe im Resonanzfalle auch für den Strom i_w und die Spannung am Ersatzkreise und damit für die Energie auf dem Kondensator der Fall, d. h. mechanische Masse und elektrische Kapazität entsprechen einander.

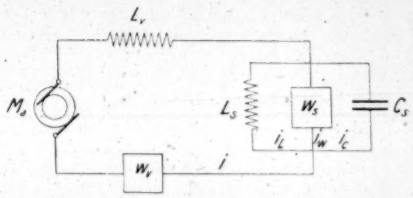


Fig. 2.

Die Größen L_s, C_s und w_s des elektrischen Ersatzkreises sind konstant, solange der Apparat akustisch-mechanisch nicht geändert wird und solange das feste Magnetfeld im Luftraum konstant ist. Ändert sich in diesen Verhältnissen etwas, d. h. wird der Apparat zum Beispiel in ein anderes Schallmedium versetzt, so haben wir auch eine Änderung mit den entsprechenden elektrischen Größen L_s, C_s und w_s vorzunehmen.

Die Widerstände w_s und w_v sind durch den Begriff des mechanischen Wirkungsgrades η miteinander verknüpft, und zwar ist

$$\eta = \frac{w_v}{w_s + w_v}.$$

Denken wir uns den Strom i konstant gehalten, d. h. den Apparat mit konstanter Kraft erregt, so ist der Fall der festgebremsten Spule d. h. der mechanischen Leistung Null, gegeben durch $w_v = 0$ und $\eta = 0$, während das andere Extrem der stark schwingenden Spule im schallweichen Medium[1]) durch sehr großes w_v und einen Wirkungsgrad η nahezu gleich 1 dargestellt wird.

Bei sehr großen Verstimmungen unterhalb der Resonanzfrequenz wird der Arbeitswiderstand w_s durch die Selbstinduktion L_s kurz geschlossen, während oberhalb die Kapazität C_s allmählich den ganzen Strom i übernimmt, der bei dem Vorgang als konstant angenommen wird, da das Verhalten des Apparates bei Erregung mit konstanter Kraft diskutiert werden soll. Beim Durchlaufen der Resonanzkurve von den tiefsten bis zu den höchsten Frequenzen über die Resonanzfrequenz hinweg, nimmt die aus w_s, L_s und C_s bestehende Kombination die Werte 0, w_s, 0 an. Die elektrische Spannung an dieser Widerstandskombination ist proportional und ein Maß für die mechanische Amplitude, wie die elektrische Gesamtstromstärke ein Maß für die erregende Kraft ist.

Im allgemeinen zerlegt sich der Strom i in einen Wattstrom $i \cos \varphi_s$, der den Widerstand w_s durchfließt, und in einen wattlosen Strom $i \sin \varphi_s$, der die Differenz des Selbstinduktions- und Kapazitätsstromes ist. Nennen wir die drei Ströme i_w, i_L und i_C und ist φ_s der Winkel zwischen Strom i und der gemeinsamen Spannung e_s an Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{i_L - i_C}{i_w} = \left(\frac{1}{\omega L_s} - \omega C_s \right) w_s.$$

Führen wir die Resonanzfrequenz ω_R und die Verstimmung x durch die Beziehung

$$\frac{\omega_R}{\omega} = 1 + x$$

ein und beschränken uns auf die Nähe der Resonanz, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{w_s}{\omega_R L_s} \cdot 2x.$$

Da die Dämpfung

$$\mathfrak{d}_s = \pi \cdot \frac{\omega_R L_s}{w_s}$$

ist, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{2\pi x}{\mathfrak{d}_s}.$$

Für Frequenzen unterhalb der Resonanz, d. h. positive x, ist φ_s positiv, und es tritt zur Wirkung des Widerstandes w_s ein Selbstinduktionseinfluß, für Frequenzen oberhalb dagegen ein Kapazitätseinfluß, während in der Resonanz sich die Wirkungen von L_s und C_s aufheben, und der Kreis sich wie ein reiner Ohmscher Widerstand verhält.

Die Gleichung für die Dämpfung kann man auch schreiben

$$\mathfrak{d}_s = \pi \cdot \frac{1 - \eta}{\eta} \cdot \frac{\omega_R L_s}{w_v}.$$

Da für einen Apparat w_v, ω_R und L_s Konstante sind, so ergibt sich, daß, wie beim elektromechanischen Transformator, der Ausdruck

$$\frac{\eta \mathfrak{d}_s}{1 - \eta} = K$$

eine Apparat-Konstante darstellt, die zur Beurteilung der Güte eines Apparates, bei Untersuchungen in verschiedenen Medien, und, wie sich in einer späteren Arbeit zeigen wird, auch bei der Darstellung der Empfängereigenschaften mit Vorteil Verwendung findet.

II. Das Diagramm.

Das Spannungsdiagramm des in Fig. 2 dargestellten elektrischen Kreises hat die Gestalt der Fig. 3. Es stellt DE die Richtung des Stromes i und nach Richtung und Größe die bei konstant gehaltenem Strome i unveränderliche Spannung e_v am Widerstande w_v dar. Man errichtet in D eine Senkrechte, macht

$$OD = i \omega L_v,$$

so daß OD die Spannung an der Selbstinduktion L_v ist. Der Punkt O ist infolgedessen kein fester Punkt im Diagramm, sondern schwankt von seiner für die Resonanz gültigen Lage auf der Strecke OD proportional zu ω hin und her. Er nähert sich D für tiefere Frequenzen und entfernt sich für höhere. Beschränken wir uns auf die Nähe der Resonanz, so kann man ihn praktisch als feststehend ansehen, wie sich später auch durch Betrachtung der Fig. 5 zeigen wird, in der dieser Veränderung Rechnung getragen ist. Die Strecke ED verlängert man bis B, sodaß

$$\frac{BE}{ED} = \frac{\eta}{1 - \eta}$$

ist. Beschreibt man zu EB als Durchmesser einen Kreis, so ist dieser Kreis der geometrische

1) Diese Zeitschr. **17**, 601, 1916 u. **20**, 104, 1919.

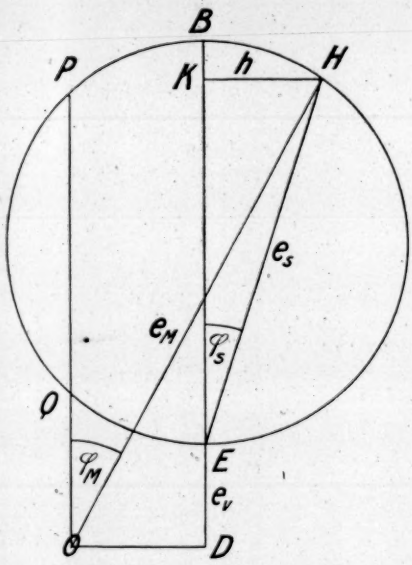


Fig. 3.

Ort für die Endpunkte aller Spannungen e_s am Widerstande w_s bzw. e_M an der Maschine. Trägt man den Verstimmungswinkel φ_s in E an EB an — positiv nach rechts, negativ nach links — so stellt EH nach Richtung und Größe den Wert von e_s dar. Fällt man nämlich das Lot $HK = h$, so ist

$$EH = \frac{h}{\sin \varphi_s}$$

und

$$h = \frac{\eta}{1-\eta} e_v \sin \varphi_s \cos \varphi_s$$

und daher

$$EH = \frac{\eta}{1-\eta} e_v \cos \varphi_s.$$

Da nun, wie aus der früheren Betrachtung und Fig. 2 folgt

$$e_s = i_s w_s = i \cos \varphi_s \frac{\eta}{1-\eta} w_s,$$

d. h.

$$e_s = \frac{\eta}{1-\eta} e_v \cos \varphi_s$$

ist, so ergibt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung, daß $EH = e_s$ ist.

Den Wert e_M für die Maschinenspannung findet man nach Richtung und Größe in der Strecke OH und die Phasenverschiebung φ_M zwischen e_M und i als Winkel zwischen OH und der im Punkte O zu BD gezogenen Parallele PO, da e_M aus e_s hervorgeht, indem man in Richtung des Stromes die Spannung $e_v = DE$ und senkrecht zur Stromrichtung die Spannung $i\omega L_v = OD$ addiert.

Aus dem Diagramm erkennt man, daß der Spulenschallgeber als Selbstinduktion, reiner Ohmscher Widerstand oder Kapazität wirken kann. Liegt der Punkt H auf dem zur Geraden OQP rechts liegenden Kreisbogen, so haben wir Nacheilung des Stromes gegen die Maschinenspannung und damit Selbstinduktionswirkung, auf dem zu OQP links liegenden Kreisbogen Voreilung und damit Kapazitätswirkung, während in den beiden Punkten P und Q nur rein Ohmsche Wirkung übrigbleibt. Hierbei entsprechen Lagen des Punktes H auf dem zu BE rechts liegenden Halbkreise Frequenzen unterhalb der Resonanz und links oberhalb, während der Punkt B dem Resonanzpunkt und der Punkt E den Frequenzen o und ∞ entspricht.

Ist die freie Selbstinduktion vernachlässigbar klein, so rückt der Punkt O in den Punkt D und die Punkte P und Q in die Punkte B und E und wir finden, daß der Sender in Resonanz eine rein Ohmsche Belastung darstellt, während unterhalb derselben eine Selbstinduktionswirkung und oberhalb eine Kapazitätswirkung hinzutritt.

III. Beziehung zwischen dem Watt- bzw. wattlosen Widerstand, dem Wirkungsgrad und dem Verlustwiderstand.

Aus dem Diagramm kann man ohne weiteres den wattlosen Widerstand entnehmen, den die Maschinenspannung überwinden muß. Es ist

$$\frac{e_M}{i} \sin \varphi_M = \frac{h + i\omega L_v}{i}$$

$$= \frac{\eta}{1-\eta} w_v \sin \varphi_s \cos \varphi_s + \omega L_v.$$

Der mit φ_s veränderliche Teil dieses Ausdruckes hat seinen größten bzw. kleinsten Wert für $\varphi_s = \pm 45^0$, d. h. für Verstimmungen

$$\pm x = \frac{\mathfrak{d}_s}{2\pi}.$$

Der Wattwiderstand ergibt sich aus dem Diagramm zu

$$\frac{e_M}{i} \cos \varphi_M = \frac{e_v + \frac{h}{\operatorname{tg} \varphi_s}}{i}$$

$$= \left(1 + \frac{\eta}{1-\eta}\cos^2\varphi_s\right) w_v$$

$$= w_v + \frac{\eta}{1-\eta} \cdot w_v \cdot \cos^2\varphi_s$$

$$= w_v + w_s \cos^2\varphi_s.$$

Für Resonanz wird dieser Ausdruck gleich $w_v + w_s$ und für sehr große Verstimmungen, d. h. bei praktisch ruhender Spule gleich w_v.

Diese Ausdrücke für die Widerstände sind auf Grund des vorstehend beschriebenen Diagramms abgeleitet, das seine Entstehung einer Methode verdankt, mechanisch-akustische Arbeitsvorgänge elektrisch zu deuten und durch äquivalente elektrische Größen zu ersetzen. Es wird daher von Interesse sein, festzustellen, daß auf direktem Wege dieselben Werte erhalten werden können.

IV. Theoretische Berechnung des Watt- und wattlosen Widerstandes.

Nennen wir die gesamte Schwingungsmasse der Spule Sp in Fig. 1 einschließlich Membran und Mediummasse m, die Elastizität der Membran c, den Dämpfungsfaktor $\delta = \frac{b}{2m}$ und die mechanische Amplitude y, so lautet in den bekannten Bezeichnungen die Kräftegleichung

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + \frac{y}{c} = BlJ \sin \omega t,$$

wenn B die konstante Induktion im Luftspalt, l die Gesamt-Drahtlänge auf der Spule und

$$i = J \sin \omega t$$

der die Spule durchfließende Wechselstrom ist. Die bekannte Lösung dieser Differentialgleichung für die kontinuierliche Schwingung außerhalb der Ein- und Ausschaltvorgänge ist

$$y = \omega y_0 \sin(\omega t + \varphi_s)$$

wobei y_0 die Maximalamplitude bei der Verstimmung φ_s ist, und diese Verstimmung durch die Gleichung bestimmt wird

$$\operatorname{tg}\varphi_s = \frac{\frac{1}{c} - m\omega^2}{\omega b}$$

Der Winkel φ_s ist die Phase zwischen Kraft und Geschwindigkeit, und zwar bedeutet z. B. ein positives φ_s, daß die Geschwindigkeit der Kraft vorauseilt, d. h. eine Erregung unterhalb der Resonanzfrequenz. Die in der Spule durch die Bewegung im Kraftlinienfelde B induzierte Spannung ist, abgesehen vom Vorzeichen,

$$e = Bl\dot{y}.$$

Wie man aus der allgemeinen Theorie der Schwingungsgleichung findet, ist

$$\omega y_0 = \frac{BlJ}{b}\cos\varphi_s$$

und daher

$$e = Bl \cdot \frac{BlJ}{b} \cdot \cos\varphi_s \sin(\omega t + \varphi_s).$$

Zwischen Strom i und Spannung e herrscht also die Phasenverschiebung φ_s. Mithin sind die beiden Komponenten der Spannung

$$E\sin\varphi_s = \frac{(Bl)^2}{b} J \sin\varphi_s \cos\varphi_s$$

$$E\cos\varphi_s = \frac{(Bl)^2}{b} J \cos^2\varphi_s.$$

Bezeichnen wir mit E_R den Wert von E für Resonanz, so ist, da in Resonanz $\varphi_s = 0$, d. h. Spannung und Strom in Phase sind

$$E_R = \frac{(Bl)^2}{b} J.$$

Zu dieser Gegenspannung, die durch die Bewegung der Spule im Kraftfelde hervorgerufen wird und der Gegenspannung eines Motors entspricht, tritt noch eine Verlustspannung

$$E_v = w_v J$$

in Phase mit J und daher auch mit E_R; sie entspricht dem Ohmschen Spannungsabfall im Anker eines Motors.

Wir haben früher den Wirkungsgrad als das Verhältnis des mechanisch-akustischen Arbeitswiderstandes zu diesem + Verlustwiderstand bezeichnet. Statt der Widerstände können wir auch die zugehörigen Spannungen setzen und erhalten

$$\eta = \frac{E_R}{E_R + E_v}$$

oder nach Einsetzung der Werte für E_R und E_v

$$\eta = \frac{\frac{(Bl)^2}{b}}{\frac{(Bl)^2}{b} + w_v}$$

und hieraus

$$\frac{(Bl)^2}{b} = \frac{\eta}{1-\eta} w_v.$$

Dies in die Werte für den wattlosen bzw. Wattwiderstand eingesetzt, ergibt

$$\frac{E}{J}\sin\varphi_s = \frac{\eta}{1-\eta} w_v \sin\varphi_s \cos\varphi_s$$

$$\frac{E}{J}\cos\varphi_s = \frac{\eta}{1-\eta} w_v \cos^2\varphi_s.$$

Diese Ausdrücke stellen nur die durch die reine Spulenschwingung hervorgerufenen Wirkungen dar. Durch Addition von ωL_v bzw.

w_r erhält man die Widerstandskomponenten des wahren Apparates, wobei der Winkel φ_r zwischen E und J auf der linken Seite der Gleichungen in φ_{II} übergeht. Eine Vergleichung mit den aus dem Diagramm abgeleiteten Formeln zeigt, daß beide Wege zu dem gleichen Resultate geführt haben. Rückwärts kann diese Übereinstimmung die Richtigkeit der Hilfskonstruktion des Ersatzkreises und des aufgestellten Diagramms erweisen.

V. Versuchsresultate.

Wir entnehmen unserem zahlreichen Beobachtungsmaterial die Daten für einen Apparat und wollen an Hand der Resultate zeigen, daß Theorie und Experiment in guter Übereinstimmung sind.

Die Messungen erfolgten nicht mit Wattmeter, Voltmeter und Amperemeter, wie dies bei der Aufnahme der Resonanzkurve des elektromechanischen Transformators[1]) geschah, sondern durch direkte Messung des Watt- und wattlosen Widerstandes in der Brücke. Um nicht wiederholt zwischen positiven und negativen Phasenverschiebungen zu wechseln, und um die Ungenauigkeiten der Brückenmessung des wattlosen Widerstandes bei kleinen Phasenwinkeln zu vermeiden, war eine feste Selbstinduktion dem Apparat vorgeschaltet, die so bemessen war, daß auch bei der größten Kapazitätswirkung noch resultierende selbstinduktive Belastung übrigblieb. Von den gemessenen Werten wurden dann der Watt- und wattlose Widerstand der vorgeschalteten Selbstinduktion abgezogen und so die entsprechenden Widerstände des Apparates gefunden.

In Fig. 4 gilt als Abszisse die prozentuale

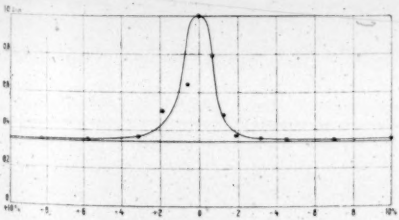


Fig. 4.

Verstimmung positiv nach links und unterhalb der Resonanz, negativ nach rechts und oberhalb der Resonanz, während als Ordinate die beobachteten Werte des Wattwiderstandes als Punkte, durch Kreise markiert, eingetragen sind,

[1]) Diese Zeitschr. **20**, 104, 1919.

wobei der Maßstab so gewählt ist, daß dem Resonanzpunkt der Widerstand 1 Ohm entspricht. Die verbindende Kurve stellt gleichzeitig auch die Leistungskurve dar, wenn wir uns den Apparat mit konstanter Stromstärke erregt denken. Durch Anlegen der Verlustlinie an die Resonanzkurve findet man in dem Ordinatenverhältnis im Resonanzpunkt den Wirkungsgrad zu $\eta = 0{,}66$. Der Ordinatenabschnitt zwischen Verlustlinie und Resonanzkurve ist der Verlustwiderstand $w_v = 0{,}34$ Ohm, während der Ordinatenabschnitt zwischen Verlustlinie und Resonanzkurve in Resonanz der mechanische Arbeitswiderstand $w_r = 0{,}66$ Ohm ist. Denken wir uns diesen Ordinatenabschnitt halbiert und im Halbierungspunkte die Breite der Resonanzkurve gemessen, so finden wir hieraus die Dämpfung zu $\delta = 0{,}054$.

Aus diesen Werten von η, w_r und δ ist nun entsprechend der oben mitgeteilten Formel der wattlose Widerstand des Apparates berechnet und als Kurve in Fig. 5 abhängig von x,

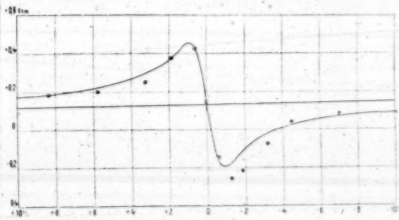


Fig. 5.

d. h. der prozentualen Verstimmung aufgetragen. Er beschreibt die ihm charakteristische v-Kurve und ist im allgemeinen positiv, d. h. der Apparat wirkt als Selbstinduktion, und nimmt nur von etwa 0,2 bis 4 Proz. Verstimmung oberhalb der Resonanz negative Werte an, so daß der Apparat auf diesem Gebiet eine kapazitive Wirkung hat. Bei Abwesenheit jeder freien Selbstinduktion L_0 müßte diese Kurve symmetrisch zur Nullinie sein. Der wattlose Widerstand der freien Selbstinduktion ist bei Resonanzfrequenz ω_R für diesen Apparat bei festgebremster Spule bestimmt zu $\omega_R L_0 = 0{,}13$ Ohm und als Gerade ansteigend mit ω in der Fig. 5 gleichfalls eingetragen. Wie man erkennt, ist die v-Kurve zu dieser Geraden doppelt gespiegelt und nähert sich ihr asymptotisch für sehr kleine und sehr große Verstimmungen. Es entspricht dies Verhalten vollständig der abgeleiteten Formel für den wattlosen Widerstand des Apparates. Die für die einzelnen Beobachtungspunkte bei frei schwingender Spule ge-

messenen Werte des wattlosen Widerstandes sind in Fig. 5 als Punkte, durch Kreise markiert, eingetragen und zeigen, daß die direkt gemessenen Werte mit denen aus η, w_v und δ berechneten hinreichend übereinstimmen.

Der untersuchte Apparat besaß, wie bereits eingangs allgemein ausgeführt, Kurzschlußwicklungen auf den Magnetpolen. Trotzdem ist noch eine Rest-Selbstinduktion übriggeblieben, die wohl hauptsächlich von den Kraftlinien, die sich in Luft schließen, herrührt. Läßt man die Kurzschlußwicklungen fort, d. h. Felder im Eisen der Magnetpole zu, so tritt, wie sich experimentell nachweisen läßt, eine Unsymmetrie der Kurven ein. Es verringern sich in der Kurve des wattlosen Widerstandes die Werte der selbstinduktiven Wirkung unterhalb der Resonanz, während sich diejenigen der kapazitiven Wirkung oberhalb vergrößern. Eine Andeutung hierfür läßt sich bereits in den durch Beobachtung gewonnenen Punkten der Fig. 5 erkennen. Die Differenz des wattlosen Widerstandes zwischen größter Selbstinduktions- und größter Kapazitätswirkung bleibt hierbei aber nahezu dieselbe. Gleichzeitig beobachtet man bei fehlenden Kurzschlußwicklungen eine Unsymmetrie der Kurve des Wattwiderstandes. Es vergrößern sich die Werte unterhalb der Resonanz und verringern sich oberhalb. Bei Verwendung von Kurzschlußwicklungen aber sind die Kurven symmetrisch und entsprechen den Gesetzen, die wir nach der Ersatzkreismethode und aus dem zugehörigen Diagramm abgeleitet haben, und bestätigen, ebenso wie die früher mitgeteilte direkte Ableitung, die Brauchbarkeit und Richtigkeit der zugrunde liegenden Methode.

Zusammenfassung.

Im Vorstehenden ist die von uns bereits früher angegebene Methode, elektromechanische Schwingungsprobleme durch Einführung von elektrischen Ersatzkreisen für die mechanischen Schwingungsvorgänge rein elektrisch zu behandeln, auf Schallgeber angewandt worden, bei denen die Erregung durch eine in einem konstanten Magnetfeld schwingende Spule erfolgt. Wir haben die Theorie und Wirkungsweise solcher Apparate gegeben, das Diagramm aufgestellt und die Gesetze für das Verhalten als Schallgeber abgeleitet. Insbesondere ist gezeigt, wie der Watt- und wattlose Widerstand von wenigen Konstanten abhängt und berechnet werden kann, und daß die Versuchsresultate mit der Theorie in Übereinstimmung sind.

Kiel, im November 1919.

(Eingegangen 31. Dezember 1919.)

Zur Messung der Radiumemanation in Quellwässern.

Von H. Greinacher.

Die üblichen Fontaktoskope[1]) bzw. Fontaktometer[2]) bestehen im wesentlichen aus einem Elektroskop und einem Blechgefäß, das zur Aufnahme des Quellwassers, und zugleich als Ionisierungsgefäß dient. Nachdem eine abgemessene Menge Wasser in die Blechkanne eingebracht ist, wird die Emanation durch Schütteln ausgetrieben, worauf man die Ionisierung der Luft über dem Wasser mittels des aufgesetzten Elektroskops mißt. Um genaue Resultate zu bekommen, ist dafür zu sorgen, daß der Ionisierungsraum stets gleiche Größe hat, da nur dann die elektrostatische Kapazität des Meßsystems und der Duanesche Korrektionsfaktor[3]) (Absorption der Strahlung in den Gefäßwänden) konstant bleiben, d. h. die Wassermenge sollte stets dieselbe sein. Um sich hiervon möglichst unabhängig zu machen, wird das Ionisierungsgefäß gewöhnlich ziemlich groß (10 bis 15 Liter) genommen. Man hat dann auch noch den Vorteil, daß fast alle Emanation aus dem Wasser ausgeschüttelt wird. Nimmt man z. B. 1 Liter Wasser bei einem 10-Liter-Gefäß, so beträgt die Korrektur infolge der im Wasser verbleibenden Emanation nur noch etwa 2,5 Proz. Die Veränderlichkeit des Absorptionskoeffizienten der Emanation mit der Temperatur kommt dann praktisch nicht mehr in Betracht. Die Berechnung wird daher beim Schüttelverfahren auch in dieser Hinsicht einfacher als beim Zirkulationsverfahren[4]). Der Apparat hat aber einen für Reisezwecke ziemlich ins Gewicht fallenden Nachteil: Er ist zu umfangreich und schwer.

Um dem abzuhelfen, haben Kohlrausch und Loewenthal sich mit den handlicheren 2-Liter-Kannen begnügt und haben diesen überdies, wohl der bequemeren Verpackungsfähigkeit wegen, viereckige Form gegeben. Es ist aber klar, daß sie sich damit verschiedener, die Genauigkeit bedingenden Faktoren begeben. Geht man nur bis zu einer $^1/_2$-Liter-Füllung, so sind schon Kapazität und Duanescher Faktor wesentlich geändert. Letzterer ist überhaupt bei der viereckigen Form unbekannt und nicht nach der Formel $f = \frac{1}{1 - 0{,}517\ ^{O}/_{V}}$ zu berech-

1) C. Engler u. H. Sieveking, diese Zeitschr. **6**, 700, 1905.
2) H. Mache u. St. Meyer, diese Zeitschr. **10**, 860, 1909.
3) W. Duane u. A. Laborde, C. R. **150**, 1421, 1910.
4) H. W. Schmidt, diese Zeitschr. **6**, 561, 1905.

nen. Auch ist die Berechnung der Resultate komplizierter, da nun der Absorptionskoeffizient, der mit der Temperatur variabel ist, in sie eingeht.

Im folgenden sei nun ein Verfahren beschrieben, das diese Übelstände vermeidet und doch erlaubt, kleine, leicht mitzuführende Gefäße zu verwenden, und das zudem die maximale Meßempfindlichkeit gewährleistet. Haben wir ein gegebenes Gefäß vom Volumen V Liter mit V_2 Liter Wasser beschickt, so verteilt sich beim Schütteln die Emanation zwischen dem Luftvolumen V_1 und dem Wasservolumen V_2 entsprechend dem Absorptionskoeffizienten α. Bezeichnen wir die Dichte der Emanation in der Luft mit s, so ist die Emanationsmenge E_1 in V_1 und von E_2 in V_2 gegeben durch

$$E_1 = V_1 s$$

und

$$E_2 = V_2 s \alpha. \qquad (1)$$

Die gesamte ins Gefäß eingeführte Emanationsmenge ist proportional V_2. Also

$$E = E_1 + E_2 = k V_2. \qquad (2)$$

Gemessen soll, wie bei dem bisherigen Verfahren, E_1 werden. Um jedoch einen konstanten Ionisierungsraum zu haben, wird das ausgeschüttelte Wasser vor der Messung abgelassen. Inaktive Außenluft fließt dann nach. Ein Verlust von Emanation ist dabei nicht zu befürchten.

Es läßt sich nun ohne weiteres einsehen, daß die Emanationsmenge E_1 für ein bestimmtes Wasservolumen V_2 einen Maximalwert erreicht. Denn, nehmen wir die beiden extremen Werte $V_2 = 0$ und $V_2 = V$, so ist in beiden Fällen die ausgeschüttelte Emanation $E_1 = 0$. Sie muß also bei einem zwischenliegenden Werte einen Maximalwert annehmen. Es soll nun das zu verwendende Wasservolumen V_2 und der Maximalwert E_1 (im Verhältnis zur eingeführten Emanation E) berechnet werden.

Beziehung (2) wird unter Verwendung von (1)

$$E = s(V_1 + \alpha V_2) = k V_2. \qquad (3)$$

Entnimmt man hieraus s und setzt dieses in (1) ein, so erhält man

$$E_1 = \frac{k V_1 V_2}{V_1 + \alpha V_2}. \qquad (4)$$

Da E_1 ein Maximum sein soll, setzen wir $\frac{dE_1}{dV_2} = 0$, wobei wir berücksichtigen, daß

$$V_1 = V - V_2 \text{ und } dV_1 = -dV_2.$$

Man erhält

$$(V_1 + \alpha V_2)(-V_2 + V_1) - V_1 V_2 (-1 + \alpha) = 0,$$

woraus schließlich folgt

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\alpha}. \qquad (5)$$

Die Volumina müssen also nach $\sqrt{\alpha}$ geteilt werden. Wie leicht einzusehen, ist das gleichbedeutend mit

$$\frac{V_2}{V} = \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha}}. \qquad (5a)$$

Setzt man Beziehung (5) in (4) ein, so erhält man den Maximalwert von E_1.
Man erhält

$$E_1 = \frac{E}{1 + \sqrt{\alpha}}. \qquad (6)$$

Uns interessieren die Mache-Einheiten, die im Liter Quellwasser enthalten sind. Die gesuchte Größe $\frac{E}{V_2}$ folgt unmittelbar aus (6) und (5a) zu

$$X = \frac{E}{V_2} = \frac{E_1 V}{V_2^2}. \qquad (7)$$

Das Verfahren ist nun ohne weiteres einleuchtend. Man füllt die Blechkanne bis zu einer Höhe mit Wasser, die im Verhältnis $\frac{V_2}{V}$ steht, was nach (5a) aus dem bekannten Absorptionskoeffizienten zu berechnen ist. Man läßt das Wasser nach Ausschütteln ab und mißt die in der Kanne verbleibende Emanationsmenge E_1. Nach (7) findet man dann durch Multiplikation mit $\frac{V}{V_2^2}$ die Mache-Einheiten pro Liter Quellwasser.

Die Faktoren in (5a) und (7) wären dabei ein für allemal zu berechnen, wenn der Absorptionskoeffizient eine konstante Größe wäre. Leider hängt er aber stark von der Temperatur ab. Da wir ihn jedoch für alle in Betracht kommenden Temperaturen genügend genau kennen[1]), so läßt sich das Verfahren ohne wesentliche Komplikation anwenden. Man muß nur für jede Temperatur die passende Füllung nehmen, was in folgender Weise ohne Rechnung ausgeführt werden kann. Man bringt in der Kanne einen vertikalen Schlitz an, der mit einem Glasfenster zugekittet wird. Es läßt sich hierdurch die Höhe der Wasserfüllung beurteilen. Zu beiden Seiten des Schlitzes befinde sich eine Teilung. Die zur Linken sei z. B. mit Celsiusgraden (etwa 0^0 bis 40^0) versehen und gebe an, wie hoch das Wasser bei der betreffenden Temperatur eingefüllt werden muß. Schwankt die Temperatur des Quellwassers zwischen 4^0 und 40^0, so ist die

1) Siehe etwa die Tabelle in St. Meyer und E. v. Schweidler, Radioaktivität, 326, 1916.

Wasserhöhe ca. 0,6 bis 0,7 der Gefäßhöhe, obschon α zwischen etwa 0,45 bis 0,15 schwankt. Der Schlitz für das Wassermanometer braucht also nicht besonders lang zu sein. Die Teilung auf der rechten Seite kann direkt $\frac{V}{V_2^2}$ angeben. Sowohl die erste als die zweite Teilung wird ein für allemal nach den Formeln (5a) und (7) berechnet[1]). Bei den eigentlichen Messungen reduziert sich dann die ganze Berechnung auf die Multiplikation mit der Zahl auf der Teilung rechts. Ist das Gefäß zylindrisch, so kann auch der Duanesche Faktor genau angegeben werden. Zweckmäßig ist Dichtung nach Art des Fontaktometers von Mache und Meyer oder Hammer[2]) sowie die Anbringung zweier Hähne: Der obere zum Lufteinlassen, der untere zum Wasserauslassen. Die Ausschüttelung von Quellgasen, insbesondere CO_2 stört hier nicht. Die nötige Vergrößerung des Luftvolumens gewinnt man ungezwungen beim Auslaufenlassen des Wassers.

Das neue Verfahren hat ferner noch den Vorteil, die maximale Empfindlichkeit zu geben. Denn, man mißt den größtmöglichen Ionisierungsstrom, der sich in einem gegebenen Schüttelgefäß mit einer gegebenen Wassersorte erzielen läßt. Ein Fehler beim Einfüllen des Wasserquantums V_2 hat einen verhältnismäßig geringen Einfluß. Ist doch die Veränderung von E_1 mit V_2 in seiner Eigenschaft als Maximalwert sehr gering. Es könnte immerhin scheinen, daß ein fehlerhafter Wert von V_2 das Resultat wegen des Faktors $\frac{V}{V_2^2}$ quadratisch beeinflusse. Dem ist aber nicht so, da man die Emanationsmenge E_1 eigentlich aus (6) berechnet und dann erst diesen Wert durch das eingefüllte Wasservolumen V_2 dividiert. Die Genauigkeit des nach (7) gefundenen Wertes für X hängt also von der Genauigkeit, mit der sowohl α als das eingefüllte Wasservolumen V_2 bekannt sind, ab. Ein Fehler von α hat einen ziemlich kleinen Einfluß; auch geht ein Fehler in der Wasserfüllung nur linear in das Resultat ein.

Ein Nachteil des Verfahrens könnte darin erblickt werden, daß die vorgeschriebene Menge des zu verwendenden Wassers eine Beschränkung des Messbereichs bedingt. Kann man doch nach den bisherigen Verfahren je nach der Stärke der Quelle kleinere oder größere Wassermengen nehmen. In der Tat sind nach dem geschilderten Verfahren z. B. 2-Liter-Kannen sehr gut für schwache, aber nicht für sehr starke Aktivitäten geeignet. Doch hindert einen ja nun nichts, neben einer solchen Kanne nun auch noch ein kleines Gefäß zu verwenden. Geeignet dürften hierfür etwa die Dimensionen sein: Höhe 12,5 cm, Durchmesser 6,7 cm (Inhalt 0,44 Liter), da für diese Ausführung der Duanesche Faktor bestimmt ist (l. c.).

Als Fehlerquelle käme bei dem Verfahren etwa in Betracht, daß während des Ausfließens des ausgeschüttelten Wassers noch Emanation an die Luft der Kanne abgegeben werden könnte. Es ist jedoch anzunehmen, daß beim ruhigen Abfließen des Wassers kein Emanationsaustausch mehr stattfindet. Inwieweit aber ein solcher Einfluß noch wirksam sein kann, werden erst besondere Versuche zeigen müssen.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität, Dezember 1919.

(Eingegangen 18. Dezember 1919.)

1) Statt der zweiten Teilung kann auch direkt die Tabelle verwendet werden, welche $\frac{V}{V_2^2}$ für die verschiedenen Temperaturen angibt.

2) W. Hammer, diese Zeitschr. 13, 943, 1912.

Ein Versuch zur Demonstration des Rayleighschen Gesetzes.

Von Franz Rother.

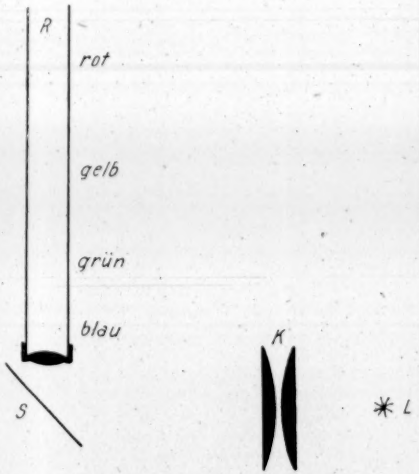
Betrachtet man bei einem Dreifarbennegativ die rote Teilaufnahme, so zeigt sich bekanntlich, daß dieses Teilbild im Gegensatz zu den beiden anderen die größte Ferndeutlichkeit besitzt. Die in Dunst gehüllte Ferne läßt viel mehr Einzelheiten erkennen, während die blaue und bis zu einem gewissen Grade auch noch die grüne Teilaufnahme in der Ferne den blauen Dunst und nicht die von ihm überlagerten Gegenstände wiedergibt. Diese Tatsache führte dazu, Aufnahmen aus der Luft, bei denen ähnliche Umstände in Erscheinung treten, für bestimmte Zwecke mit rotempfindlichen Platten unter Benutzung eines möglichst strengen Orange- oder besser Rotfilters auszuführen, um nicht den die Erdoberfläche überlagernden Dunst, sondern nach Möglichkeit die darunterliegenden Gegenstände zu photographieren. Da jede rotempfindliche Platte eine noch immer weit überwiegende Blauempfindlichkeit besitzt, muß natürlich das vom Dunst ausgehende blaue Licht durch ein Filter von seiner Wirkung ausgeschaltet werden.

Die Begründung für die geschilderten Erscheinungen gibt uns das Rayleighsche Gesetz, nach dem die Komponenten des weißen Lichtes beim Durchgang durch trübe Medien der Intensität nach umgekehrt proportional zur vierten Potenz der Wellenlänge zerstreut wer-

den. Als Folgerung ergeben sich die oben geschilderten Beobachtungen ebenso wie uns ja auch die auf- und untergehende Sonne zeigt, daß beim Durchlaufen dicker Schichten trüber Medien von weißem Licht nur noch die langwelligen Anteile übrig bleiben.

Dem Verfasser kam es nun darauf an, diese beim Durchgang von Licht durch trübe Medien auftretenden Erscheinungen experimentell zu zeigen. Bei dem bekannten Tyndallschen Versuch, der auf Grund der Lichtzerstreuung in trüben Medien die Entstehung des Himmelsblaues zeigt, kann man bei der gewöhnlichen Ausführungsform beobachten, daß am Grunde des Gefäßes, in dem sich die gewöhnlich benutzte Mastixemulsion befindet, ein Übergang von blauem zu grüngelbem Lichte stattfindet, ein Zeichen, daß es möglich sein muß bei entsprechender Anordnung die ganze Farbenskala des zerstreuten Lichtes zu zeigen, ohne sich nur auf die Darstellung des zerstreuten kurzwelligen Lichtes zu beschränken. Versuche haben nun ergeben, daß dies in sehr augenfälliger Weise mit folgender Anordnung möglich ist.

In der Figur bedeutet R ein senkrecht auf-



gestelltes, mindestens 150 cm langes Glasrohr von etwa 4 cm lichter Weite, in dessen untere Öffnung eine gute Sammellinse von kurzer Brennweite (etwa 15—20 cm) eingekittet ist. Durch einen Spiegel S oder ein totalreflektierendes Prisma wird in den Brennpunkt dieser Linse derjenige des Kondensors K einer seitlich aufgestellten Bogenlampe L gebracht, so daß das Glasrohr R von gut parallelem Lichte durchlaufen wird. Diese Anordnung gestattet das Maximum an Helligkeit anzuwenden verbunden mit sehr homogener Beleuchtung ohne störendes Nebenlicht. Füllt man nun das Rohr mit einem geeigneten trüben Medium, so sieht man sehr schön, wie zuerst von dem eindringenden weißen Lichte das Blau und dann der Reihe nach alle andern Farben bis zum Rot zerstreut werden, so daß das Rohr in seiner Längsausdehnung alle Spektralfarben zeigt. Es läßt sich auf einfache Weise zeigen, daß das aus dem oberen Ende des Rohres austretende Licht rein rot gefärbt ist. Benutzt man, wie angegeben, eine Bogenlampe als Lichtquelle, so ist die beschriebene Erscheinung sehr lichtstark.

Es kommt darauf an, das trübe Medium möglichst zweckentsprechend herzustellen, dann kann man erreichen, daß die Blaukomponente des benutzten Lichtes schon auf einer sehr kurzen Strecke im Medium vollkommen zerstreut wird. Benutzt man wie beim Tyndall-Versuch alkoholische Mastixlösung, die in Wasser eingegossen wird, so muß man darauf achten, keine zu groben Teilchen zu erhalten, was gewöhnlich passiert, wenn man eine relativ konzentrierte Mastixlösung in Wasser gießt. Bei vorstehendem Versuch wurde so verfahren, daß man 2 g Mastix in 50 ccm absol. Alkohol löste, diese Lösung in 500 ccm Alkohol goß und diese stark verdünnte Lösung erst in Wasser so, daß das Gesamtvolumen durch die angegebene Dimensionierung des Rohres bestimmt war. Man hat es jedenfalls so in der Hand, verschiedene Teilchengrößen zu erzielen, je nach der Alkoholmenge in die man die Vorratslösung gießt. Die zweckentsprechende Mischung kann man sich nach den gemachten Angaben in jedem Falle selbst ausprobieren.

Der Versuch kann noch dahin abgeändert werden, daß man durch zwischengeschaltete Filter die mittleren Wellenlängen des benutzten Lichtes wegnimmt und nur die kurz- und langwelligen Strahlen zur Wirkung gelangen läßt, also etwa Blauviolett und Rot. Man sieht dann im unteren Teile des Rohres die Mischfarbe und im oberen das reine Rot.

Geeignete Gelatinefilter sind[1]):

1. Rose bengale 0,5, Säurerhodamin 2,0, oder

2. Kristallviolett 0,3, Kupfersulfat 0,1.

Natürlich können die Farbstoffe auch gelöst in Küvetten benutzt werden, falls man

[1]) Siehe von Hübl, Die photographischen Lichtfilter. W. Knapp, Halle a. S.

nicht überhaupt vorzieht, die Enden eines lichtstarken Spektrums zu einer Mischfarbe zu vereinigen.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, Dezember 1919.

(Eingegangen 24. Dezember 1919.)

Bemerkung zu einer Abhandlung des Herrn Waetzmann.

Von E. Budde.

Im fünften Heft des laufenden Jahrganges dieser Zeitschrift hat Herr Waetzmann[1]) einen Aufsatz „Theoretisches über den Schalldruck" veröffentlicht, der sich zum großen Teil mit meiner Stellungnahme zu seinen und anderer Autoren früheren Arbeiten über Schalldruck und Kombinationstöne beschäftigt. Wollte ich alle die Punkte, bezüglich deren ich mit ihm nicht übereinstimme, klar legen und die Gründe für meine abweichende Ansicht deutlich auseinandersetzen, so müßte ich seine ganze Darlegung analysieren und das würde noch erheblich mehr Raum beanspruchen als Herrn Waetzmanns Arbeit selbst. Ich trage Bedenken, die Leser dieser Zeitschrift mit einer so umfangreichen Erwiderung zu behelligen, zumal da es sich um Fragen handelt, deren wissenschaftliche Bedeutung nicht eben tief geht und da meines Erachtens für die meisten Leser eine eingehende Widerlegung kaum erforderlich sein wird. Ich begnüge mich also, damit mein Schweigen nicht als Zustimmung ausgelegt werde, mit der Erklärung, daß ich mit den l. c. von Herrn Waetzmann aufgestellten Behauptungen keineswegs einverstanden bin.

(Eingegangen 15. April 1920.)

1) E. Waetzmann, diese Zeitschr. 21, 122, 1920.

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der „supraleitende Zustand" von Metallen.

Von C. A. Crommelin*).

Heute abend ist es meine Absicht, Ihre Gedanken auf eine Reihe von Untersuchungen über den Widerstand von Metallen zu lenken, die in dem Leidener kryogenen Laboratorium von Professor Kamerlingh Onnes bei Temperaturen ausgeführt sind, die lediglich mit flüssigem Helium herzustellen sind und die zu der auch für die Elektronentheorie der Metalle so bedeutsamen Entdeckung des sogenannten supraleitenden Zustandes verschiedener Metalle geführt haben. Zunächst möge eine kurze Besprechung der Experimente folgen, die als Grundlage dieser Untersuchungen gedient haben.

Daß in der Zeit, in der einige Laboratorien bereits flüssige Gase herzustellen vermochten, eine so fundamentale und für die Praxis und Theorie höchst wichtige Größe wie der elektrische Widerstand bald Gegenstand von Messungen bei tiefen Temperaturen wurde, liegt auf der Hand. Bereits ins Jahr 1885 fällt eine ziemlich umständliche Untersuchung von Cailletet und Bouty[1]), die indessen nicht weiter ging als bis -123^0, eine Temperatur, die sich ohne viel Mühe mit flüssigem Äthylen herstellen läßt. Erst als es gelang, flüssige Luft zu bereiten, konnte man weiter gehen. Holborn und Wien[2]) und Holborn[3]) allein haben als erste den Widerstand von einem reinen Platindraht bei 0^0 bis -190^0 genau mit dem Wasserstoffthermometer verglichen in der Absicht, mittels solcher Messungen tiefe Temperaturen genau bestimmen zu können, was ihnen und späteren Forschern ausgezeichnet gelungen ist, so daß augenblicklich das Platinwiderstandsthermometer als sekundäres Thermometer für tiefe Temperaturen am meisten geeignet zu halten ist. Zwar hatten v. Wroblewski[4]) und Olszewski[5]) bereits vor ihnen Versuche in derselben Richtung angestellt, doch ohne großen Erfolg, namentlich weil ihre Temperaturbäder nicht konstant und ihre Temperaturmessungen mangelhaft waren. Erst durch die oben genannten Messungen von Holborn und Wien, weiter die von Travers und Gwyer[6]) und namentlich die Untersuchungen in dem Leidener Laboratorium von Kamerlingh Onnes und seinen Mitarbeitern Meilink[7]), Clay[8]) und Holst[9]) ist das Platinwiderstandsthermometer zu einem Präzisionsinstrument von hohem Wert gelangt.

Doch nicht allein den praktischen Gesichtspunkt verfolgte man bei diesen Untersuchungen; auch für die Theorie, insbesondere die Elektronentheorie der Metalle, erwartete man viel von den Resultaten. Hatte man doch bei verschiedenen Gelegenheiten gemerkt, daß die Änderung des Widerstandes mit der Temperatur

*) Vortrag, gehalten vor der Physikalischen Gesellschaft zu Leiden am 13. Februar 1920. Dieser Vortrag ist schon erschienen im „Chemisch Weekblad" 1919 und wird hier abgedruckt mit Genehmigung der Redaktion dieser Zeitschrift.

bei tiefen Temperaturen eine ganz andere war, als bei hohen. Häufig, z. B. bei Platin, nahm der Temperaturkoeffizient stark ab mit der Temperatur, zuweilen fand man einen Wendepunkt in der Kurve, die den Widerstand als Funktion der Temperatur darstellte. Natürlicherweise erhob sich die Frage, wie sich der Widerstand in unmittelbarer Nähe des absoluten Nullpunktes verhielt.

Lord Kelvin[10]) war bereits 1902 im Sinne der Elektronentheorie der Metalle also von der Vorstellung aus, daß die Elektronen sich wie Gasmoleküle zwischen den Metallatomen bewegen sollten, zu dem Schluß gekommen, der Widerstand müsse beim absoluten Nullpunkt unendlich groß werden. Der Dissoziationsgrad der Elektronen sollte nämlich beim absoluten Nullpunkt Null sein, d. h. die freien Elektronen, soweit sie noch vorhanden waren, sollten ihre Beweglichkeit verlieren. Kamerlingh Onnes sprach von einer Kondensation oder einem Festfrieren der Elektronen.

Es war inzwischen noch nicht geglückt, diese Theorie experimentell zu bestätigen. Das Minimum, das man in der Widerstandskurve erwartete, war selbst bei Temperaturen von flüssigem Wasserstoff (—253° bis —259°) nicht gefunden.

Da gelang es am 10. Juli 1908 Kamerlingh Onnes, Helium zu verflüssigen und er eröffnete so der Forschung ein ganz neues Temperaturgebiet in unmittelbarer Nähe des absoluten Nullpunktes.

He siedet unter Atmosphärendruck bei einer Temperatur von ungefähr —269° C und unter einem Druck von 3 mm *Hg* bei —271,5°*). Unter den vielen Messungen, die in den folgenden Jahren auf diesem Gebiet in dem Leidener Laboratorium ausgeführt sind, nehmen die betreffs des Widerstandes von Metallen und Legierungen eine bedeutende Stelle ein. Hierauf beziehen sich unsere folgenden Betrachtungen.

Die ersten Messungen[11]) betrafen einen reinen Platindraht von 0,1 mm Dicke, dessen Widerstand bereits bei den tiefsten Temperaturen des flüssigen Wasserstoffs mit dem Wasserstoffthermometer verglichen war und den man nun weiter bei *He*-Temperaturen untersuchen wollte. Der Draht war auf einen Glaszylinder gewickelt, seine Enden waren in das Glas eingeschmolzen und an lange *Cu*-Drähte gelötet, die mit einer Wheatstoneschen Brücke verbunden waren.

Eine Durchschnittszeichnung des Bades, das unmittelbar mit dem Heliumverflüssiger verbunden war, findet man hiervor abgebildet**).

Nachdem das komprimierte gasförmige *He* eine Anzahl Spiralen (gestrichelt dargestellt) durchlaufen hat und darin erst durch flüssige Luft, dann durch flüssigen Wasserstoff abgekühlt ist, kommt es schließlich bei der 4faltig gewundenen Spirale *A*, die in einem Expansionshahn endigt. Hier wird es flüssig und strömt in den unter dem Hahn gelegenen Raum (in dem sich das *He* Thermometer Nb_1 befindet, das durch die Kapillare Nb_2 mit dem Barometerrohr Nb_3 verbunden ist), fließt durch das Vakuumrohr *Eah* in den eigentlichen Helium-Kryostat; dieser besteht aus dem Vakuumgefäß S_7, das das flüssige *He* und die hineingetauchten Apparate enthält; es ist zwecks Wärmeisolation von den Vakuumgläsern *Eb''*, *Ec''* umgeben, die mit flüssigem Wasserstoff bzw. flüssiger Luft gefüllt sind, außerdem umgibt alle ein gewöhnliches Glas mit Alkohol. Der untere Teil des Heliumglases ist unversilbert, während in der Versilberung von den beiden umhüllenden Gefäßen unversilberte Spalten ausgespart sind. In dem Falle, der in der Fig. 1 dargestellt ist, enthält der Kryostat ein *He*-Thermometer Th_3'', einen Goldwiderstand ΩAu (nämlich einen Golddraht auf einer Glasröhre), einen *Hg*-Widerstand ΩHg und einen Klappenrührer Sb, dessen Einzelheiten in der besonderen Figur neben dem Kryostaten wiedergegeben sind. Dieser Rührer sorgte für eine gute Zirkulation der Flüssigkeit, so daß die Temperatur oben und unten in dem Bade vollständig dieselbe war; vor allem beim Arbeiten unter geringerem Druck ist dieser Rührer unentbehrlich, weil sonst infolge des hydrostatischen Druckes große Temperaturverschiedenheiten oben und unten in dem Bad auftreten.

Die Ergebnisse dieser ersten Messungen waren in hohem Maße überraschend, wie aus vorstehender Tabelle deutlich hervorgeht.

Absolute Temperatur		$\frac{W_t}{W_0}$
273,09 *K*		1
20,2	flüssiger H_2	0,0171
14,2		1,0135
4,3	flüssiges *He*	0,0119
2,3		0,0119
1,5		0,0119

W_t = gemessener Widerstand
W_0 = Widerstand bei 0° C.

*) Im folgenden sollen die Heliumtemperaturen in Graden der absoluten Skala angegeben werden. (K. = Kelvin.)

**) S. Fig. 1. Wir müssen jedoch im Auge behalten, daß diese Zeichnung sich auf später zu besprechende Versuche bezieht und nicht auf die ersten Messungen an *Pt*. Es sind im Laufe der Zeit nämlich verschiedene Konstruktionen im Gebrauch gewesen. Die Figur ist Comm. Nr. 123 entlehnt. Die Klischees der meisten Figuren sind mir von Prof. Kamerlingh Onnes zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank ausspreche.

Somit keine Spur von dem nach Kelvin zu erwartenden Minimum, sondern im Gegenteil von 4,3° K ab, also in dem ganzen He-Gebiet ein sehr geringer und vollkommen konstanter Widerstand.

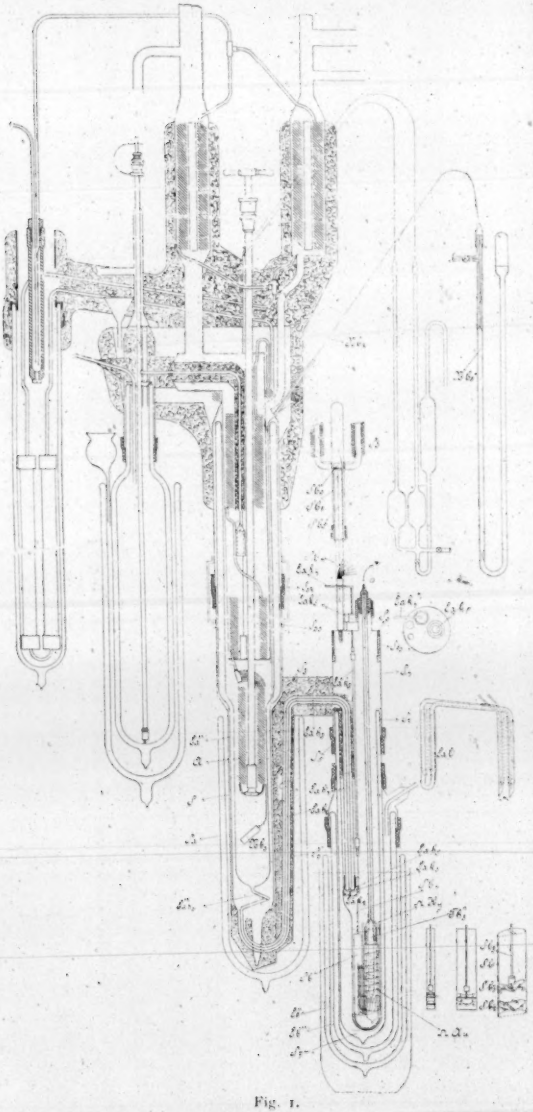


Fig. 1.

Um dieses ganz unerwartete Resultat zu erklären, bemerkte Kamerlingh Onnes, daß ein Metall wie Pt, dessen Drähte in der bekannten Weise gezogen waren, nie vollkommen rein sein kann und der restierende konstante Widerstand wohl die Folge sein könnte von der Anwesenheit einer äußerst geringen Menge Verunreinigung. Beim absoluten Nullpunkt würde der Widerstand des reinen Metalles Null sein. Um diese Hypothese näher zu untersuchen, wurden die in flüssigem Wasserstoff gemessenen Goldwiderstände[8b]) graphisch nach dem Heliumgebiet extrapoliert und diese Extrapolationen machten es sehr wahrscheinlich, daß in der Tat der Restwiderstand einer Verunreinigung zuzuschreiben war.

Später wurde die Berechtigung dieser Extrapolationen durch Messungen bei He-Temperaturen bestätigt[12]). Wie aus Fig. 6 deutlich hervorgeht, zeigen die Widerstände von Au einen dem Gehalt an Verunreinigung entsprechenden restierenden Widerstand. Auf Grund hiervon konnte man die Hypothese aufstellen, daß der Widerstand von reinem Pt und reinem Au bei He-Temperaturen wenig, vielleicht gar nicht von Null verschieden ist.

Wie vorläufig der Charakter dieser Untersuchungen auch war, man gewann doch aus ihnen die Überzeugung, daß die Theorie von Kelvin, von der oben gesprochen wurde und die jahrelang Führerin bei den Untersuchungen zu Leiden gewesen war, aufgegeben werden mußte. Daß vor einem ∞ Werden des Widerstandes nicht die Rede sein konnte, ging in überzeugender Weise aus den Experimenten hervor. Augenblicklich war es natürlich nicht möglich, eine befriedigende Theorie dieser neuen Erscheinung aufzustellen, das experimentelle Material war dazu vollkommen ungenügend; indessen Kamerlingh Onnes[11]) publizierte bereits in

derselben Abhandlung, in der die ersten Versuche beschrieben waren, eine halb empirische, halb theoretische Formel, mittels derer es ihm gelang, seine Ergebnisse mit Hilfe der Planckschen Quantentheorie zu erklären. Wir kommen hierauf später zurück, wollen daher vorläufig erst unsere Gedanken auf die weiteren experimentellen Resultate lenken.

Die folgenden Untersuchungen zeigten die Tendenz, die Hypothese vom Nullwerden des Widerstandes eines absolnt reinen Metalles experimentell zu prüfen; jedoch leider sind gezogene Metalldrähte nie so rein zu erhalten, wie es für diese Untersuchung erforderlich war, weil sie infolge ihrer Herstellung stets etwas verunreinigt sind. Im Quecksilber fand man jedoch ein Material, das durch Destillation im Vakuum in viel reinerem Zustand zu erhalten war, daher wurde dieses Material für die weiteren Untersuchungen benutzt. Das Herstellen eines hierfür geeigneten *Hg*-Widerstandes war technisch ganz besonders schwierig. Das Quecksilber, das in ein zickzackförmig gebogenes Kapillarrohr von 0,005 mm² Querschnitt gebracht wurde, sollte beim Gefrieren ohne Zweifel hier und da voneinander gerissen werden (da *Hg* sich beim Gefrieren zusammenzieht), wenn hiergegen keine besonderen Maßregeln ergriffen wurden. Diese bestanden darin, daß man kleine *Hg*-Reservoire an dem oberen Ende der zickzackförmig gebogenen Kapillare anbrachte (siehe Fig. 2). Wurde nun der *Hg*-Draht von unten nach oben langsam abgekühlt, dann konnten die *Hg*-Reservoire bei der Kontraktion von *Hg* Material supplieren und so verhindern, daß der *Hg*-Draht zerriß. Auf diese Weise glückte es dann schließlich — ich brauche wohl kaum zu sagen nach vielen vergeblichen Bemühungen — *Hg*-Widerstände von genügender Größe (z. B. 172,7 Ohm bei 0° C) zu konstruieren, die vollkommen den Erwartungen entsprachen. (Fig. 2.)

Die große Mühe und ausharrende Arbeit, die diese Konstruktion erforderlich machte, sollte jedoch ihren Lohn finden. Man fand den Widerstand bei Heliumtemperaturen unmeßbar klein. Das Merkwürdigste war jedoch, daß er dicht bei 4,2° *K* plötzlich von einem noch meßbaren Betrage ganz diskontinuierlich bis zu einem Werte herunterging, der praktisch = 0 war; die Temperatur, bei der diese Erscheinung

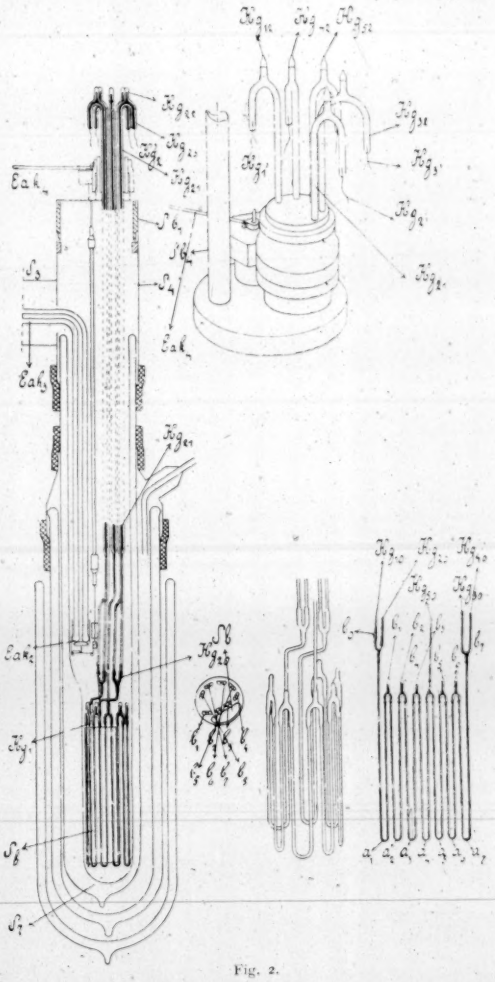


Fig. 2.

auftritt, wurde die Sprungtemperatur genannt. (Siehe Fig. 3.) Dies ist in kurzen Worten das Ergebnis einer ausgedehnten und schwierigen Reihe von Messungen.

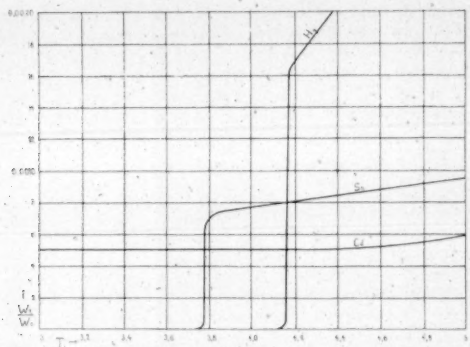


Fig. 3.

Eine Bestimmung des Widerstandes unterhalb $4{,}2^0\ K$ war nicht mehr möglich, indessen konnte festgestellt werden, daß bei $2^0{,}45\ R$

$$\frac{W_l}{W_0} < 2 \times 10^{-10},$$

war.

Bald drängten sich nun allerlei Fragen auf: ob in dem „supraleitenden" Zustand, wie ihn Kamerlingh Onnes nannte, der Widerstand wirklich $= 0$, oder bloß sehr klein war, ob man eigentlich noch von einem Widerstand sprechen könnte und ob das Ohmsche Gesetz in dem supraleitenden Zustand noch gelten würde. Zur Beantwortung dieser Fragen wurden nun die weiteren Experimente angestellt[15]). Ich betone gleich, daß es noch nicht geglückt ist, eine befriedigende Antwort auf obige Fragen zu geben, doch traten bei den Experimenten Erscheinungen auf, die die Einsicht in das Wesen des supraleitenden Zustandes merklich aufklärten. Als man versuchte, durch den supraleitenden *Hg*-Draht einen möglichst starken Strom hindurch zu schicken, um eine eventuelle Wärmeentwicklung zu untersuchen, zeigte sich, daß bei einem jeden *Hg*-Draht und bei einem bestimmten *Hg*-Draht auch wieder bei einer jeden Temperatur von einem „Schwellenwert" des Stromes gesprochen werden kann. Unterhalb des Schwellenwertes war von einer Wärmeentwicklung nichts zu bemerken, man konnte bei einigen Drähten die Stromdichte von $1200\ \frac{\text{Ampère}}{\text{mm}^2}$ verwenden, ohne daß zwischen den Enden des Drahtes von einer Potentialdifferenz etwas zu spüren war. Oberhalb des Schwellenwertes entwickelt sich jedoch plötzlich Wärme und der Draht verliert die Eigenschaften als Supraleiter. Ob man es hier mit der gewöhnlichen Jouleschen Wärme zu tun hat, die durch den auch im supraleitenden Zustande eventuell vorhandenen kleinen Widerstand oder mit einer Jouleschen Wärme, die sich lokal wegen unreiner oder inhomogener Stellen am Draht entwickelt, konnte nicht mit Sicherheit festgestellt werden. Indessen ergab es sich, daß die Wärme nicht von den Zuleitungsdrähten stammte. Kamerlingh Onnes meinte, die schlechten Stellen seien wohl die Ursache der Wärmeentwicklung. Einige Bedenken hiergegen liegen wohl in dem regelmäßigen Auftreten der Erscheinung. Den in dem supraleitenden Zustand übrigbleibenden Widerstand, mag er nun herrühren von schlechten Stellen oder nicht, nennt Kamerlingh Onnes den „mikroresiduellen Widerstand". Man nahm außerdem noch wahr, daß der Schwellenwert mit der Temperatur abnahm und daß die Sprungtemperatur etwas mit der Stromstärke variierte, nämlich stets etwas tiefer lag bei größeren Stromstärken, was wahrscheinlich in der gewöhnlichen Wärmeentwicklung seine Erklärung findet*).

Zum Schluß wurde festgestellt, daß oberhalb der Sprungtemperatur das Ohmsche Gesetz gilt.

Ich muß hier natürlich viele Einzelheiten dieser sehr ausgedehnten und subtilen Messungen mit Stillschweigen übergehen. Doch möchte ich mit einem Wort auf ein sehr merkwürdiges Ergebnis hinweisen. Nimmt man die Ursache des mikroresiduellen Widerstandes von *Hg* in

*) Siehe Fig. 4 und 5. Die Ordinaten stellen den Quotienten der Potentialdifferenz in Mikrovolt und die Stromstärke (in 0,004 A) dar, die Abszissen die Abweichung der Temperatur in 1000stel Graden vom Siedepunkt des Heliums vor $4^0{,}25\ K$ aus.

Verunreinigungen an, so sollte man nach Analogie der oben wahrgenommenen Erscheinungen an Gold zu dem Schluß kommen, daß das reine *Hg* an Unreinheiten nur 1 Millionstel enthält von dem, was reines Gold enthält und es ist schwierig, dies anzunehmen. Messungen an *Hg*, das vorsätzlich mit *Au* und *Cd* stark verunreinigt war, führten zu dem überraschenden Resultat, daß auch dieses sehr verunreinigte *Hg* supraleitend wurde.

Wir wollen hiermit von den Untersuchungen an *Hg* absehen und jetzt die an zwei anderen supraleitenden Metallen mitteilen, nämlich *Pb* und *Sn*[15]). *Sn* wurde im Vakuum geschmolzen

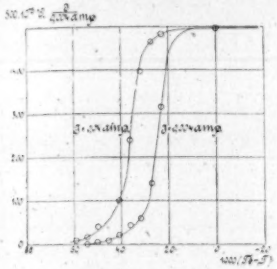


Fig. 4.

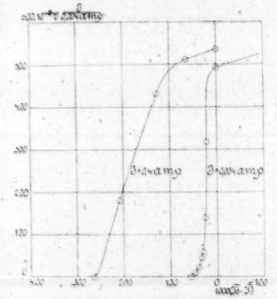


Fig. 5.

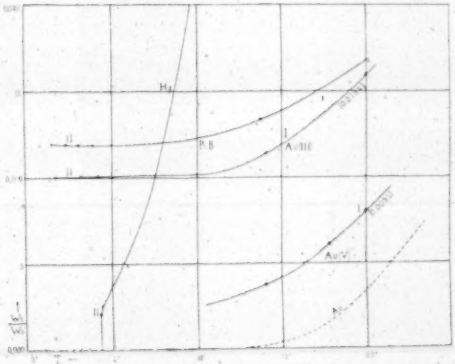


Fig. 6.

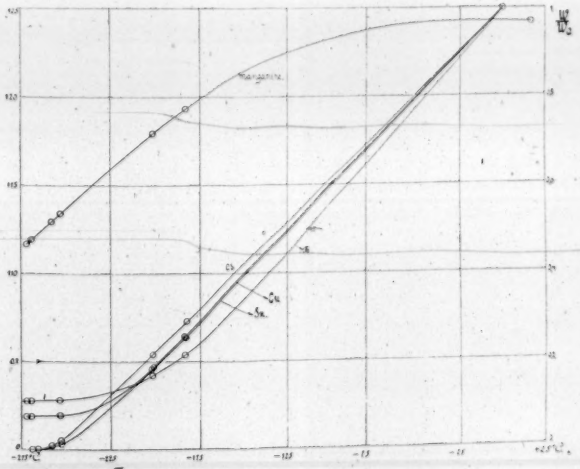


Fig. 7.

und dann in eine gläserne Kapillare gegossen. Man fand, daß es bei Heliumtemperaturen supraleitend wurde und der Sprungpunkt bei $3{,}78^0\ K$ lag, also tiefer lag als der von Hg. Der Sprungpunkt von Pb scheint viel höher zu liegen; noch gewöhnlich leitend bei Wasserstofftemperaturen, konnte er bei Heliumtemperaturen allein in dem supraleitenden Zustand beobachtet werden, der Sprungpunkt lag zu hoch, um im flüssigen He bestimmt werden zu können (vermutlich bei $6^0\ K$). Dann wurde außerdem eine amalgamierte Zinnfolie untersucht. Der Sprungpunkt lag bei $4{,}29^0\ K$. Ich bemerke hierbei, daß amalgamiertes Zinn bei höherer Temperatur supraleitend wurde als seine Bestandteile. Außer Quecksilber, Blei und Zinn wurden noch einige andere Metalle untersucht, um zu entscheiden, ob es vielleicht ein Metall gäbe, dessen Widerstand in flüssigem Helium einen geeigneten Temperaturkoeffizienten besäße und das als Widerstandsthermometer zu verwenden wäre[20]). Diese Untersuchung trug einen ganz orientierenden Charakter und ergab, daß Eisen, Kadmium und Kupfer in flüssigem Helium einen konstanten Widerstand zeigten (wahrscheinlich aufzufassen als Restwiderstände wie bei Gold und Platin), daß dagegen die Legierungen Konstantan und Manganin einen geeigneten Temperaturkoeffizienten des Widerstandes zeigten und so für die Konstruktion von Widerstandsthermometern in Betracht kamen.

(Fortsetzung folgt.)

Das Verhältnis des mittleren Fehlers des arithmetischen Mittels zu dessen wahrem Fehler bei der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Von Heinrich Vater[1]).

Berichtigung.

Auf S. 217, Spalte 2, 14. Zeile lies richtig: Es wird daher in solchem Fall auch die Formel des mittleren Fehlers des mittleren Fehlers gegenstandslos.

1) Diese Zeitschr. **21**, 216, 1920.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule München Dr. Ing. Adolf Schlötzer für Geodäsie, an der Universität Hamburg Dr. Chr. Jensen für kosmische Physik und Dr. J. Nielsen für reine und angewandte Mathematik, an der Universität Berlin Dr. Max Bergmann für Chemie, an der Universität Jena Dr. Erwin Schrödinger (bisher an der Universität Wien) für Physik, an der Universität Königsberg Dr. Erich Kretzschmann für theoretische Physik.

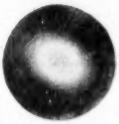
Ernannt: Arthur R. Ling zum Professor der Chemie an der Universität Birmingham, das Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für physikalische Chemie und Elektrochemie Professor Dr. Kerschbaum zum Leiter des Versuchslaboratoriums der C. P. Goerz' Photochemische Werke in Berlin-Zehlendorf, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule und Universität Breslau Dr. Ernst Steinitz in gleicher Eigenschaft an die Universität Kiel, der Direktor der Veifa-Werke in Aschaffenburg-Frankfurt a. M. Dr. Friedrich Dessauer zum ord. Honorarprofessor an der Universität Frankfurt a. M., der Privatdozent für angewandte und reine Mathematik an der Universität Halle Dr. Richard Grammel zum ord. Professor für technische Mechanik und Thermodynamik an der Technischen Hochschule Stuttgart, der Vorsteher der chemischen Abteilung am Hygienischen Institut der Universität Frankfurt a. o. Professor Dr. Joseph Tillmanns zum ord. Professor für Chemie der Nahrungs- und Genußmittel an derselben Universität, der a. o. Professor an der Universität Leipzig Dr. Erich Marx zum planmäßigen a. o. Professor für Radiophysik an derselben Hochschule, der Observator am Astrophysikalischen Observatorium zu Potsdam Professor Dr. Wilhelm Münch zum Hauptobservator und der wissenschaftliche Mitarbeiter Dr. Arnold Kohlschütter zum Observator an diesem Institut, der Adjunkt an der Montanistischen Hochschule in Leoben Dr. Hans Flechner zum a. o. Professor für allgemeine und analytische Chemie ebenda, Dr. P. Krais, Vorstand der chemisch-physikalischen Abteilung am Deutschen Forschungsinstitut für Textilindustrie in Dresden, zum Professor, der a. o. Professor an der deutschen Universität Prag Dr. Alfred Kirpal zum ord. Professor der Chemie ebenda, der Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts für physikalische Chemie und Elektrochemie in Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Fritz Haber zum ord. Professor für anorganische und Experimentalchemie an der Universität Berlin (als Nachfolger Emil Fischers und unter Beibehaltung seiner jetzigen Stellung).

Berufen: Der Privatdozent an der Eidg. Technischen Hochschule und an der Universität Zürich Dr. Mieczyslow Wolfke zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Warschau.

Ehrung: Professor Albert Einstein in Berlin erhielt neben seiner Tätigkeit als lesendes Mitglied an der Akademie der Wissenschaften in Berlin und als Leiter des Instituts für Physik an der Kaiser-Wilhelm-Akademie eine Ehrenprofessur an der Reichsuniversität in Leiden.

Gestorben: Der a. o. Professor für allgemeine und technische Chemie an der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Joachim Biehringer, der Professor für angewandte Chemie an der Universität Sheffield Lucius T. O. Shea, der Direktor der Hartmann & Braun-A.-G. in Frankfurt a. M. Dr. Franz Braun, der frühere ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Graz Hofrat Dr. Leopold Pfaundler, der frühere ord. Professor der Astronomie an der Universität Christiania und Direktor des Universitätsobservatoriums Dr. Hans Geelmuyden, der Observator am Astronomischen Recheninstitut in Berlin Professor Dr. Adolf Berberich, der ord. Professor für Chemie an der Universität Pittsburg Dr. F. C. Phillips.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

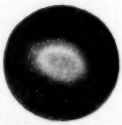

I

II

III

IV

V


VI

VII

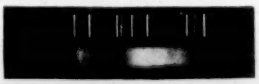
VIII

IX

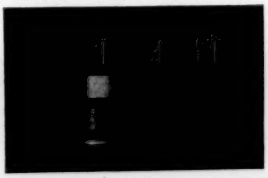
X

XI

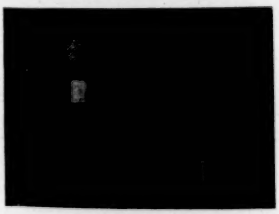
XII



XIII



XIV



XV

XVI

XVII

J. E. Lilienfeld u. F. Rother, Untersuchungen über die sichtbare, blaugrüne Brennfleckstrahlung an der Lilienfeldröhre. Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen.)

	Seite
Atombau und Kristallsymmetrie, v. H. Thirring . .	281
Crommelin, C. A., Der „supraleitende Zustand" von Metallen. (Z. B.) (Fortsetzung.)	300
Gerlach, W., Die Gesamtstrahlung der Hefnerlampe	299
Glimmstrom: Bemerkungen bezüglich der Theorie des —, v. R. Holm	296
Hefnerlampe: Die Gesamtstrahlung der —, v. W. Gerlach	299
Holm, R., Bemerkungen bezüglich der Theorie des Glimmstroms	296
Kristallsymmetrie und Atombau, v. H. Thirring . .	281
Metalle: Der „supraleitende Zustand" von —, v. C. A. Crommelin. (Z. B.) (Fortsetzung.)	300
Strahlungsmessung: Neue Apparate zur —, v. W. Voege	288
Thirring, H., Atombau und Kristallsymmetrie . .	281
Voege, H., Neue Apparate zur Strahlungsmessung .	288

Verlag von S. HIRZEL in Leipzig.

Prinzipien der Atomdynamik von **Dr. J. Stark**

In drei Teilen.

I. Die elektrischen Quanten. Preis geheftet M. 6.40, gebunden M. 11.—

II. Die elementare Strahlung. Preis geheftet M. 15.60, gebunden M. 21.—

III. Die Elektrizität im chemischen Atom. Preis geheftet M. 16.—, gebunden M. 22.—

ausschließlich Teuerungszuschlag.

Wissenschaftlich gebildeter Herr

mit abgeschlossener Hochschulbildung, guten elektrotechnischen, elektrochemischen und physikalischen Kenntnissen zur Leitung einer Glaselektrischen Abteilung eines größeren industriellen Unternehmens zum baldigen Eintritt gesucht. Geeigneten Herren bietet sich eine gut bezahlte, sichere Lebensstellung. Ausführliche Bewerbungen mit Lebenslauf, ev. Zeugnisabschriften und Gehaltsansprüchen erbeten unter **S. H. 566** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2.

Für unser ***Technisches Versuchsamt*** *suchen wir als wissenschaftlichen Mitarbeiter*

1. ***einen Physiker***

mit technischer Veranlagung für Messungen, Wärmefragen und physikalische Chemie;

2. ***einen Diplom-Ingenieur***

mit Erfahrung im Materialprüfungswesen, auch in metallographischen Fragen; derselbe soll auch das technische Lager in Material- und konstruktiven Fragen beraten.

Lebenslauf, Zeugnisabschriften, Gehaltsansprüche, frühester Eintrittstermin unter Kennwort A. B. erbeten an die

Personalabteilung

der Farbwerke vorm. Meister, Lucius & Brüning Höchst a. M.